دوره کتاب
جبر

برای دانش آموزان دبستان و دبیرستان

(مطابق آخرین برنامه وزارت معارف)

و اقسام کتب فارسی فرانسه وعربی وغیره

جای فروش

طهران

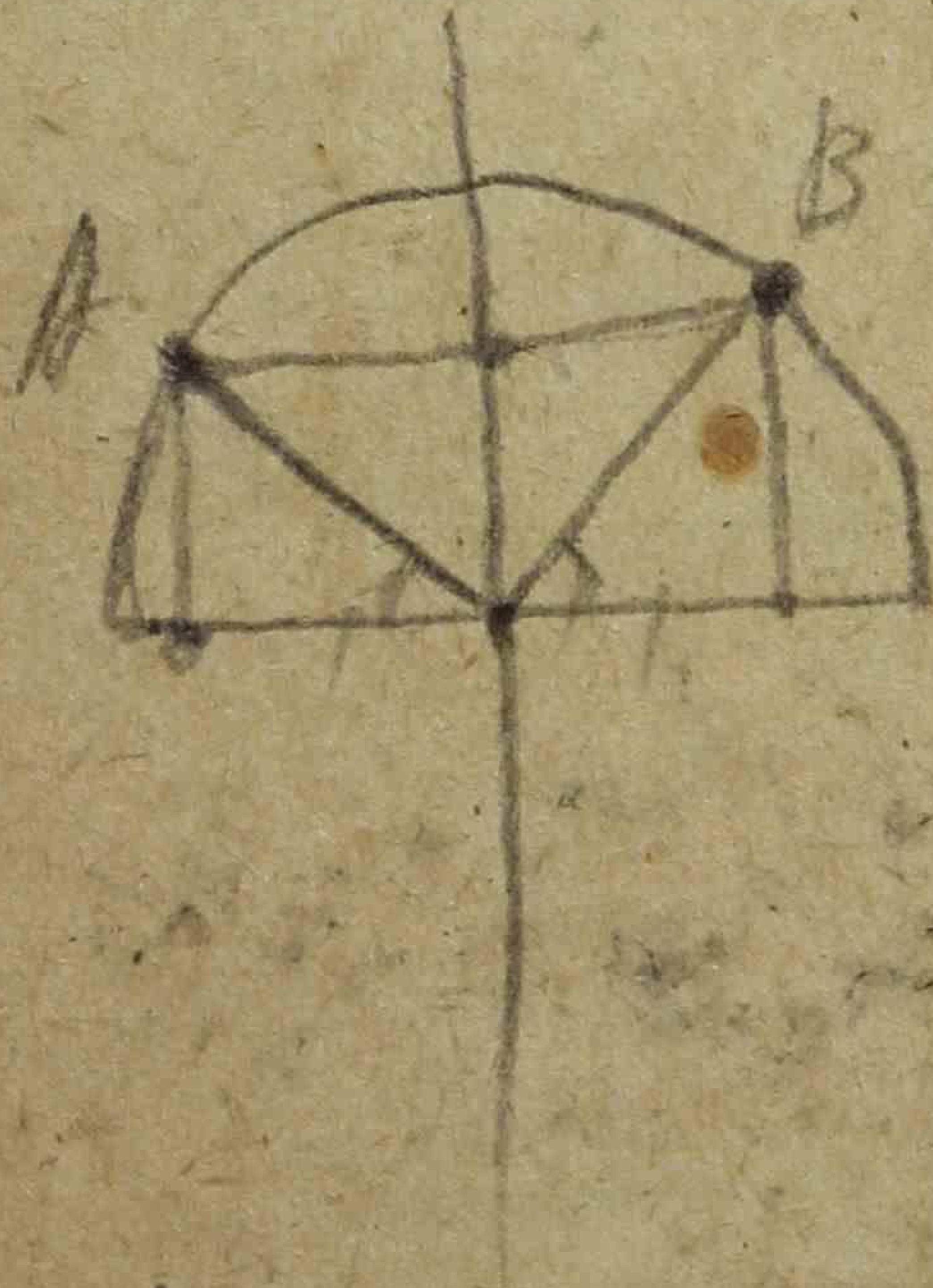
خیابان ناصر خسرو * ناصریه سابق *

کتابخانه فردوسی



« چاپخانه فرور – سبزه میدان »




A
B

جبر و مقابله

برای سال پنجم و ششم متوسطه

مطابق پرگرام وزارت جلیله معارف



تألیف - محمود مهران

معلم ریاضیات مدارس متوسطه و مدرسه متوسطه نظام

چاپ اول

طهران - شهریور ۱۳۱۲



(۲۷

بنام ایزد دانا

تعاریف و اطلاعات مختصری از هندسه تحلیلی

۱- محور - خط مستقیم نامحدود $x'x$ را محور نامیده و در روی آن

جهت از x' به x را

جهت مثبت و نقطهٔ O

مفروضه در روی

آنرا مبدأ اختیار میکنیم

x' — B — O — A — x

جهت محور را عموماً با سهم مشخص مینمایند

فاصلهٔ هر نقطه مانند A واقعه بر محور را از مبدأ O طول نقطه مینامند و آن مثبت خواهد بود هرگاه متحرکی از مبدأ O بمنتهای A حرکت کند در جهت مثبت محور سیر نماید و در غیر اینصورت منفی میباشد بنابراین طول A مثبت و طول B منفی میباشد

۲- واحد مقیاس - معمولاً طولهای $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ و نظایر آنهارا با واحد طول اندازه میگیرند ولی اغلب واحد مزبور را بمقیاس معینی تبدیل

میمایند که آنرا واحد مقیاس نامیده و برای اندازهٔ قطعات فوق بکار میبرند مثلاً اگر واحد مقیاس یک سانتیمتر و قطعه OA سه واحد مقیاس و قطعه OB دو واحد مقیاس باشد طول نقطه A عبارت میگردد از

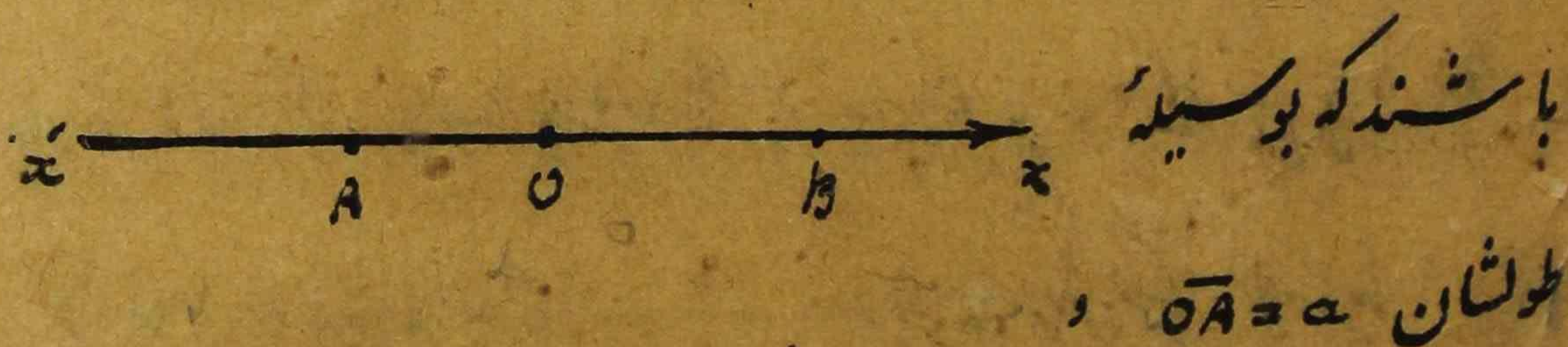
$\overline{OA} = +3$ و طول نقطه B عبارت میگردد از $\overline{OB} = -2$

۳- تعبیر جبری نقاط محور — نمایش هندسی اعداد جبری -

با تعریف فوق هر نقطه واقعه بر محور را میتوان فقط بیک عدد جبری تعبیر نمود و بالعکس هر عدد جبری را میتوان فقط بیک نقطه محور نمایش داد مثلاً ۵ - نظیر نقطه ایست از نیم خط Ox که از نقطهٔ O بفاصلهٔ ۵ واحد مقیاس باشد

۴- محاسبهٔ طول قطعه خط متکی بر محور —

فرض میکنیم A و B دو نقطه واقعه بر محور $x'x$ باشند که بوسیلهٔ



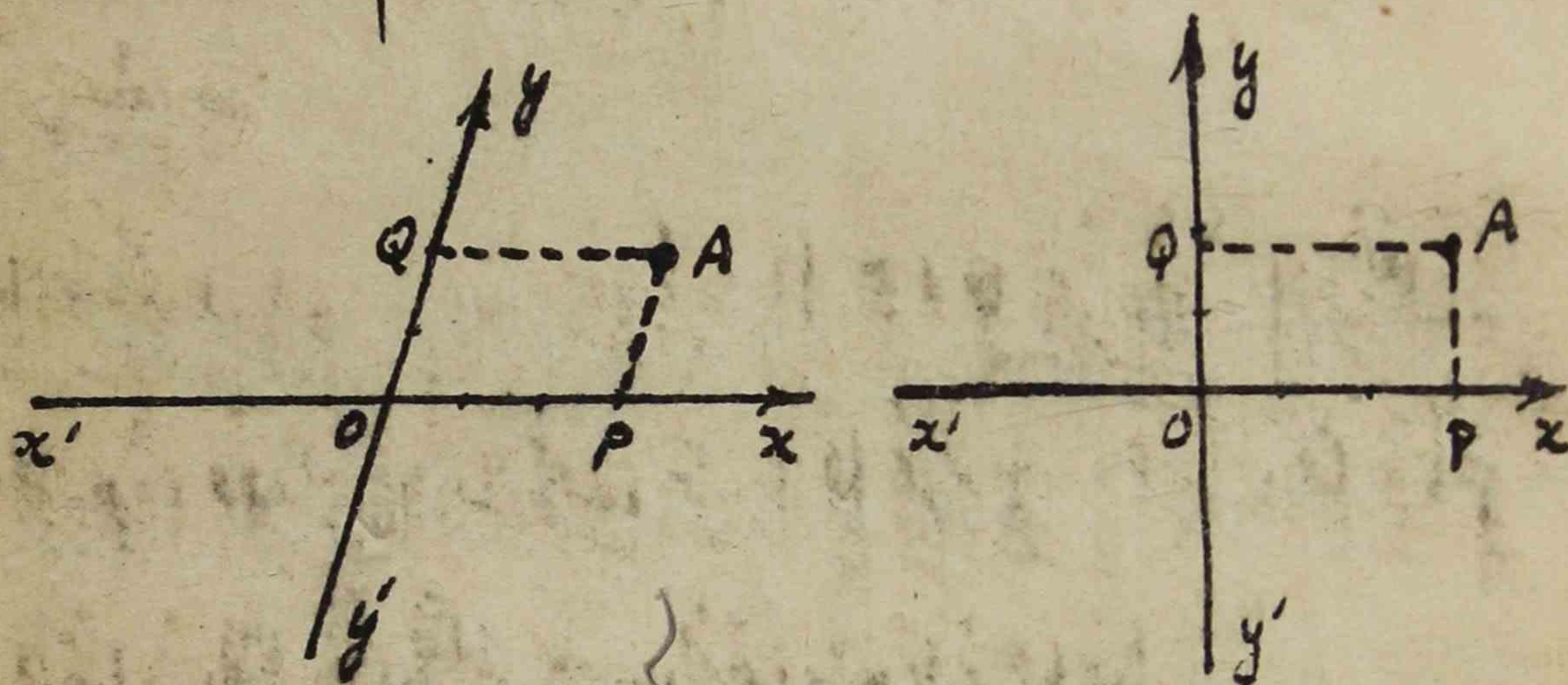
طولشان $\overline{OA} = a$ و $b = \overline{OB}$ مشخص باشند حال برای محاسبهٔ فاصلهٔ آنها $\overline{AB}$ بروفق رابطهٔ شال همواره میتوان نوشت

$$\overline{AB} + \overline{BO} + \overline{OA} = 0$$

و از آنجا $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ و یا $\overline{AB} = b - a$

یعنی طول هر قطعه خط انتکی بر محور مساویست با تفاضل طول منتهی و مبدا آن

۵ – مختصات نقطه – مختصات قائم – دو محور $x'x$ و $y'y$



راکه در نقطه O یکدیگر را قطع کرده اند اختیار میکنیم حال چون نقطه مانند A را در سطح دو محور فوق فرض نموده از این نقطه دو خط موازی محورها رسم کنیم تا نقاط P و Q بدست آید قطعه خط $\overline{OP}$ را طول یا x و یا Abscisse نقطه A و قطعه خط $\overline{OQ}$ را عرض یا y و یا Ordonnée نقطهٔ A و دستگاه $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ راکه همیشه با دو عدد جبری نمایش داده میشوند مختصات نقطهٔ A میناسند

دو محور فوق را محور مختصات و نقطه O را مرکز مختصات گویند

مثلا هرگاه $\overline{OP} = +3$ و $\overline{OQ} = +2$ باشد مختصات نقطهٔ A

عبارت دیگر دو از +۳ و +۲ که آن را چنین مینویسند $A \left| \begin{matrix} x = ۳ \\ y = ۲ \end{matrix} \right.$

و یا (۳ و ۲) A که خوانده میشود A بمختصات ۳ و ۲

چنانکه ملاحظه میشود در نمایش مختصات نقطه همیشه طول نقطه را مقدم بر عرض آن ذکر مینمایند

در حالتیکه دو محور برهم عمود باشند نقاط P و Q بترتیب تصاویر نقطه A بر دو محور بوده و در این حالت مختصات را قائم گویند و ما در این کتاب آنچه راجع بمختصات نقطه بیان میکنیم مقصود مختصات قائم میباشد

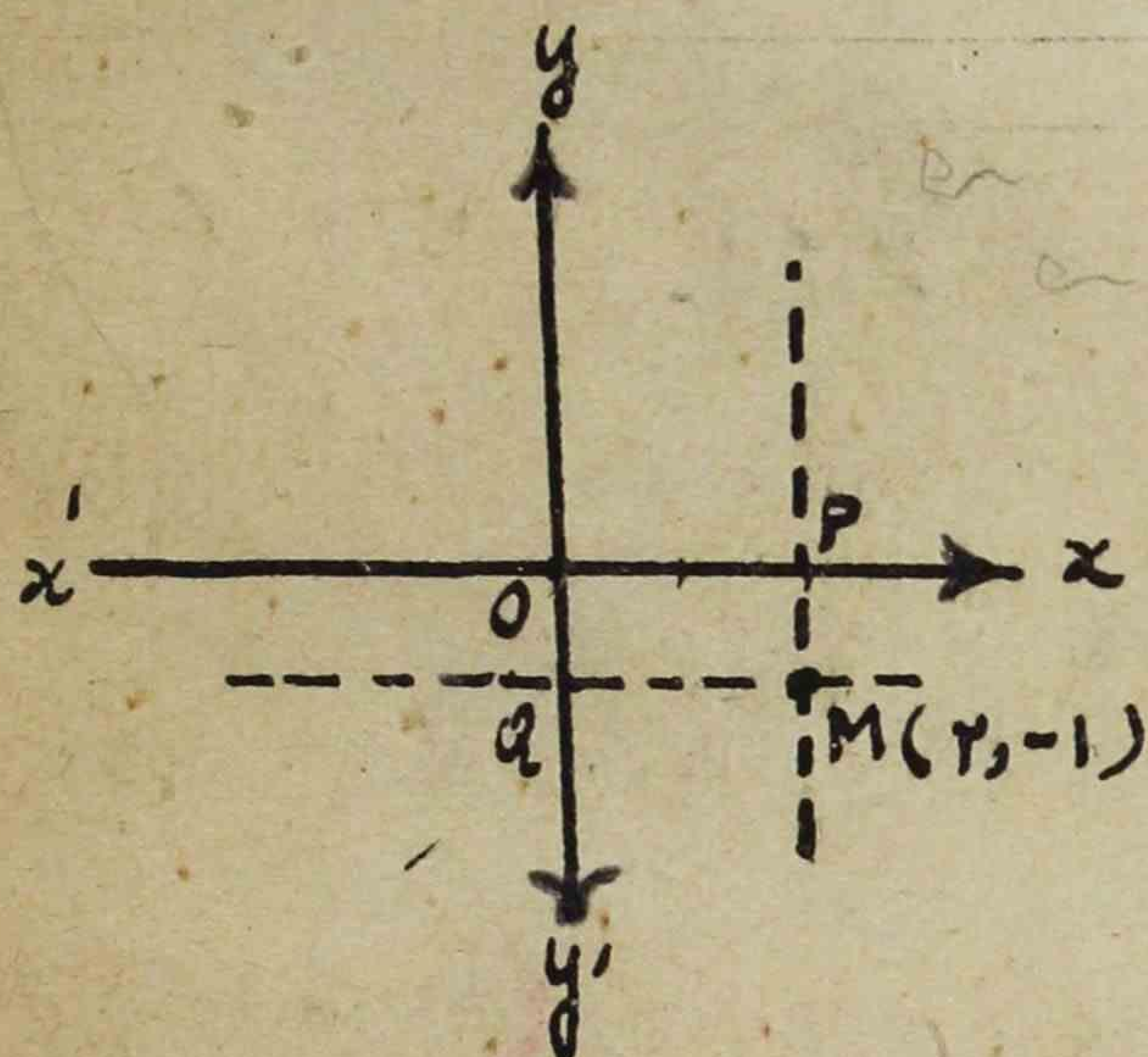
از تعریف فوق نتایج ذیل حاصل میشود :

۱ ـ طول نقاط واقعه بر محور $y'y$ وهمچنین عرض نقاط واقعه بر محور $x'x$ صفر و بنابراین طول و عرض نقطه O که بر هر دو محور واقعست مساوی صفر میباشد

۲ ـ مختصات نقاط واقعه در داخل زاویه yOx هر دو مثبت و مختصات نقاط واقعه در داخل زاویه $x'Oy'$ هر دو منفی و طول نقاط واقعه در داخل زاویه yOx' منفی و عرض آنها مثبت و بالاخره طول نقاط واقعه در داخل زاویه $y'Ox$ مثبت و عرض آنها منفی میباشد

۶ ـ تعبیر جبری نقاط واقعه در یک صفحه ـ نمایش هندسی

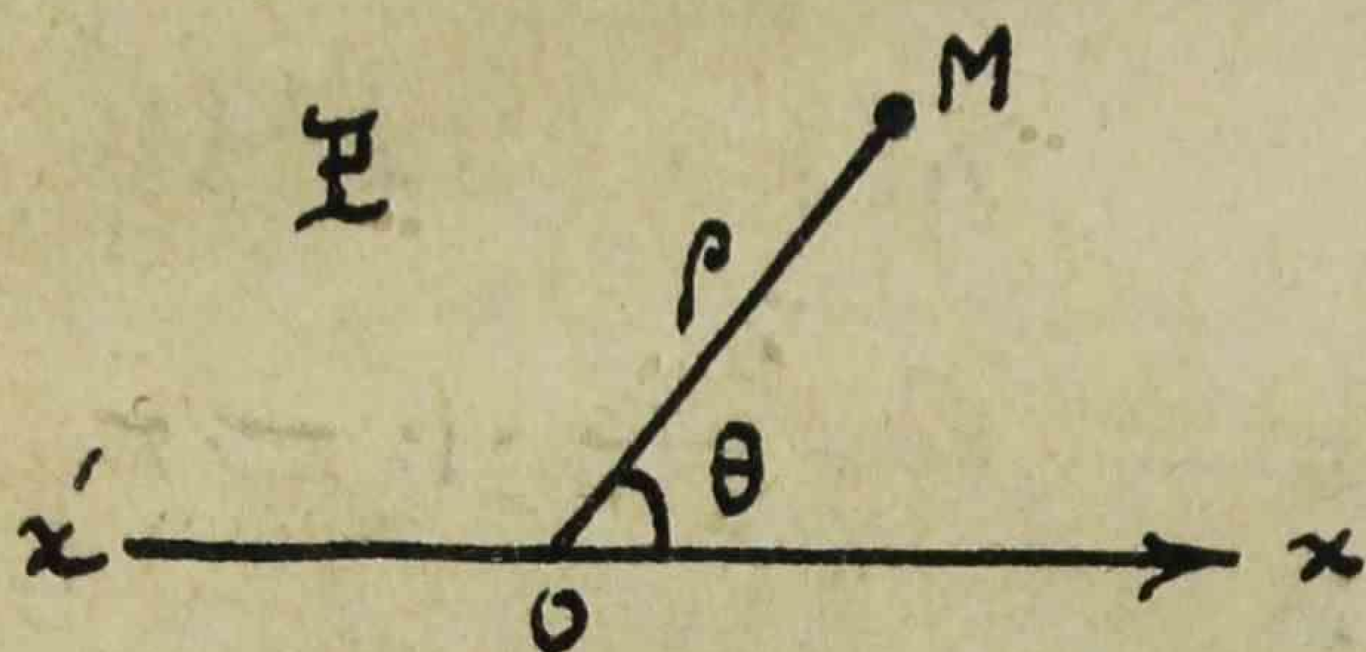
دستگاه دو عدد جبری - بنا بتعریف فوق هر نقطه واقعه در سطح دو محور را میتوان فقط بیک دستگاه مرکب از دو عدد جبری تعبیر نمود و بالعکس هر دستگاه مرکب از دو عدد جبری را میتوان بیک نقطه واقعه در سطح دو محور نمایش داد مثلاً چون دستگاه



دو عدد جبری ۲+ و ۱- را فرض نموده از مبدأ o در روی محور xx' طول OP را مساوی ۲+ جدا نموده از نقطه P عمودی بر محور xx' اخراج کنیم این عمود مکان نقاطی خواهد بود بطول ۲+ و همچنین اگر از مبدأ o در روی محور yy' طول Oq را مساوی ۱- اختیار نموده از نقطه q عمودی بر محور yy' اخراج کنیم این عمود مکان نقاطی است بعرض ۱- و چون این دو عمود قطعاً در نقطه مانند M تلاقی مینمایند بنابراین نقطه M تنها نقطه ایست بمختصات ۲+ و ۱- که نمایش هندسی دستگاه دو عدد جبری ۲+ و ۱- میباشد

۷ - مختصات قطبی - غیر از مختصاتی که در فوق برای نمایش

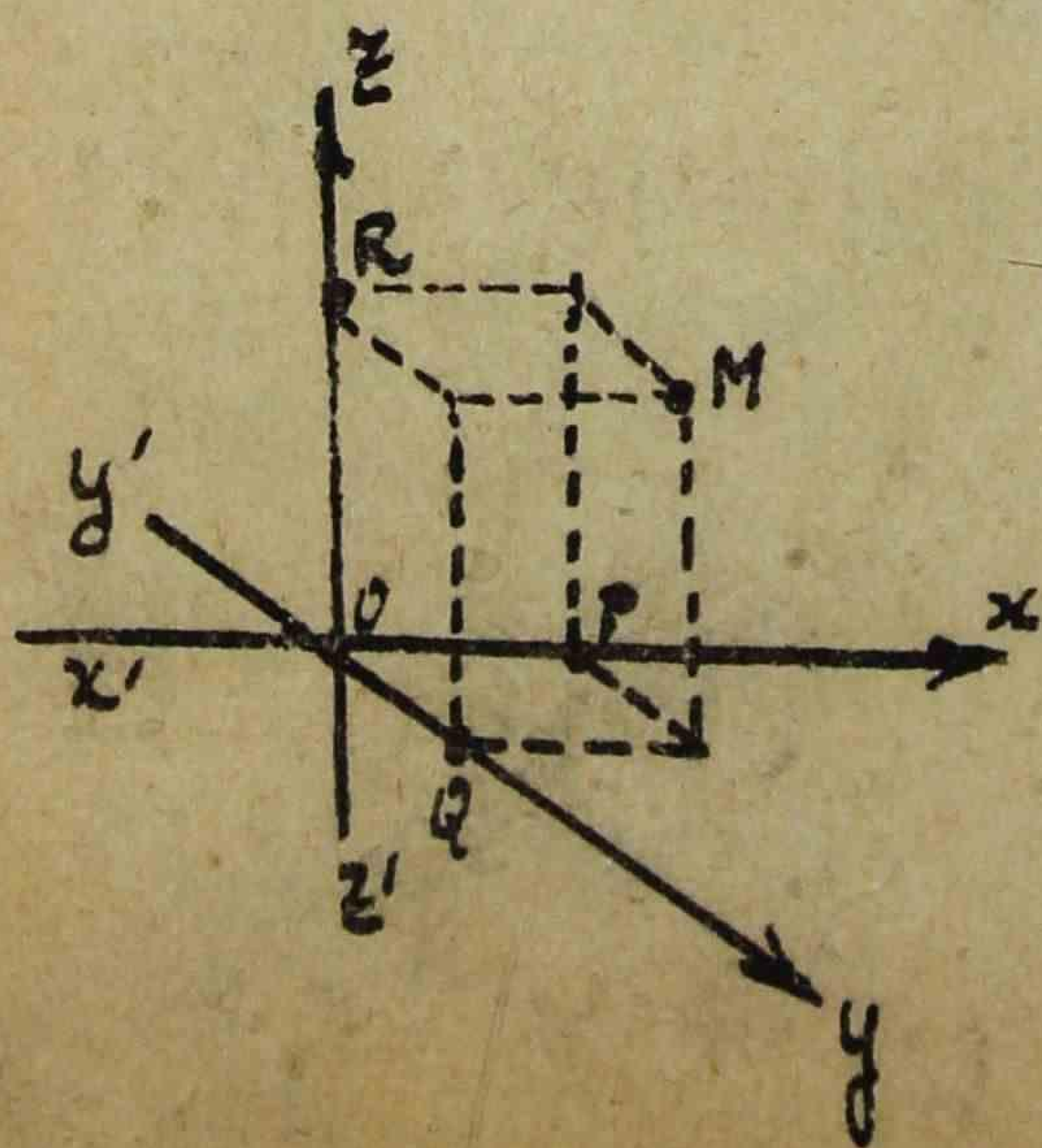
نقاط یک صفحه بیان نمودیم در هندسهٔ تحلیلی مختصات دیگری نیز بکار میرود که آنرا مختصات قطبی گویند ازینقرار محوری مانند $x'x$ در صفحهٔ P اختیار نموده و هر نقطه مانند M واقعه در این صفحه را بواسطهٔ فاصلهٔ $\rho = OM$ و زاویه $\widehat{MOx} = \theta$ مشخص مینمایند و مینویسند M (ρ و θ)



محور $x'x$ را محور قطبی و نقطه O را قطب و OM را شعاع حامل و مختصات فوق را مختصات قطبی مینامند

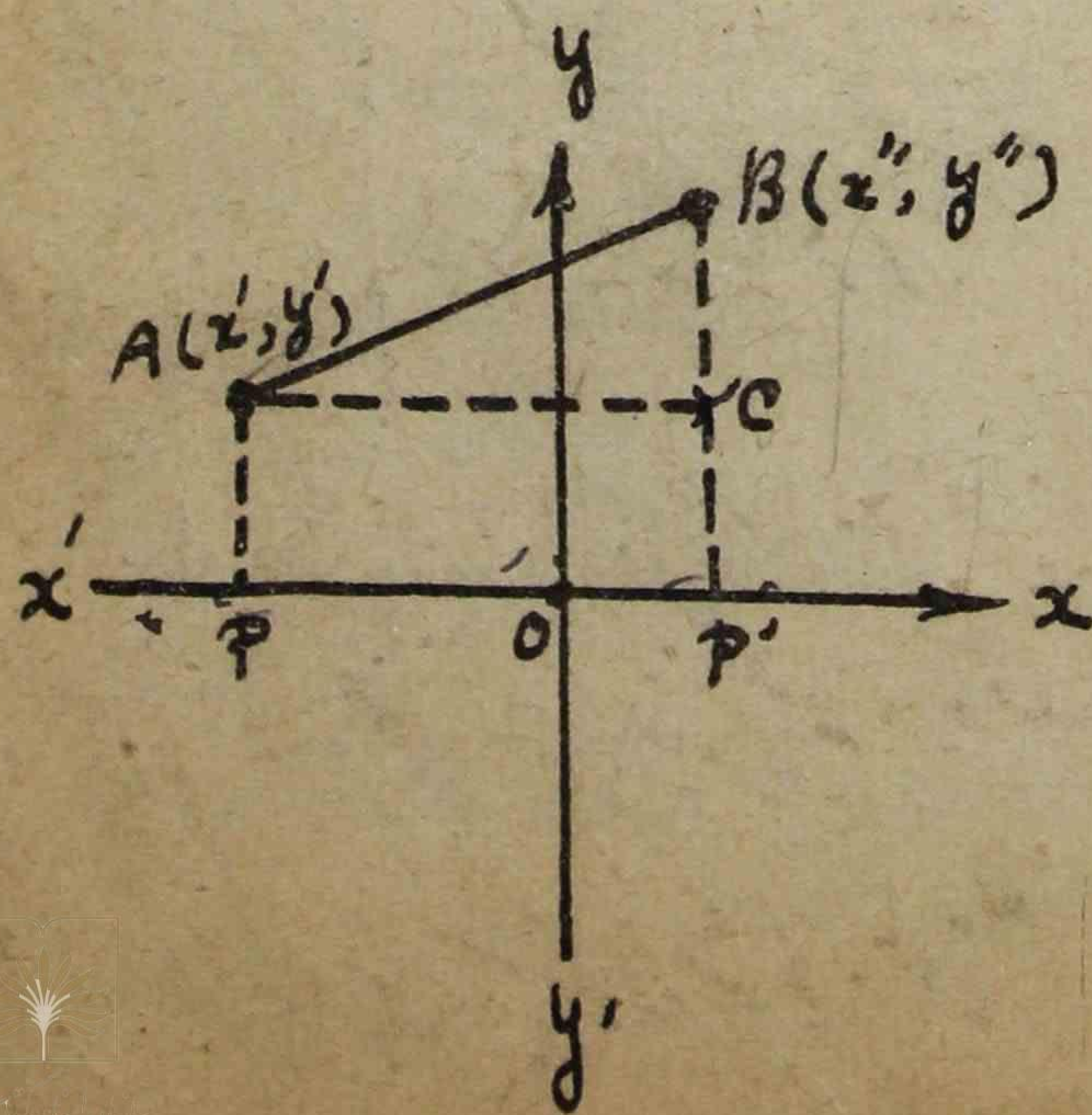
۸ - تعبیر جبری نقاط فضائی - نمایش هندسی دستگاه سه عدد جبری

در هندسهٔ تحلیلی برای نمایش نقاط فضائی مانند M از نقطه O محور ثالث $z'z$ را بر صفحه xoy عمود مینمایند با تشکیل دستگاهی مرکب از سه محور بدست میآید حال نقطه M را بر هریک از سه محور در نقاط P و Q و R تصویر مینمایند در اینصورت بر OP



و OQ یعنی طول وعرض نقطه M عدد جبری دیگری اضافه میشود و آن اندازهٔ OR میباشد که آنرا ارتفاع یا z نقطه M مینامند بطوریکه نظیر هر نقطه فضائی M دستگاهی مرکب از سه عدد جبری x و y و z بدست میاید که آنهارا مختصات نقطه فضائی M گویند و بالعکس نظیر هر دستگاه مرکب از سه عدد جبری فقط یک نقطه فضائی مشخص میگردد که آنرا نمایش هندسی این دستگاه گویند چه با وجود سه عدد جبری فوق سه نقطه P و Q و R بر سه محور مشخص میشود که نقطه مطلوب M رأس متقاطر O از مکعب مستطیلی است که بر روی OP و OQ و OR بنا شود

۹ــ **فاصلهٔ دو نقطه** ــ چون نقطه با مختصات آن مشخص است بنابراین میتوان فاصلهٔ دو نقطه را که مختصات آنها در دست باشد حساب نمود باینطریق که دو نقطه مانند



A (x′, y′) و B (x″, y″) را فرض نموده AB را وصل می کنیم از مثلث قائم الزاویه ABC حاصل میشود :

ولی بنابر آنچه میدانیم بهر وضعی که نقاط مفروض ختیار شوند همواره $\overline{AC} = x'' - x'$ و $\overline{CB} = y'' - y'$ میباشد $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$

که چون در رابطهٔ فوق منظور کنیم حاصل میشود :

$$\overline{AB}^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$$

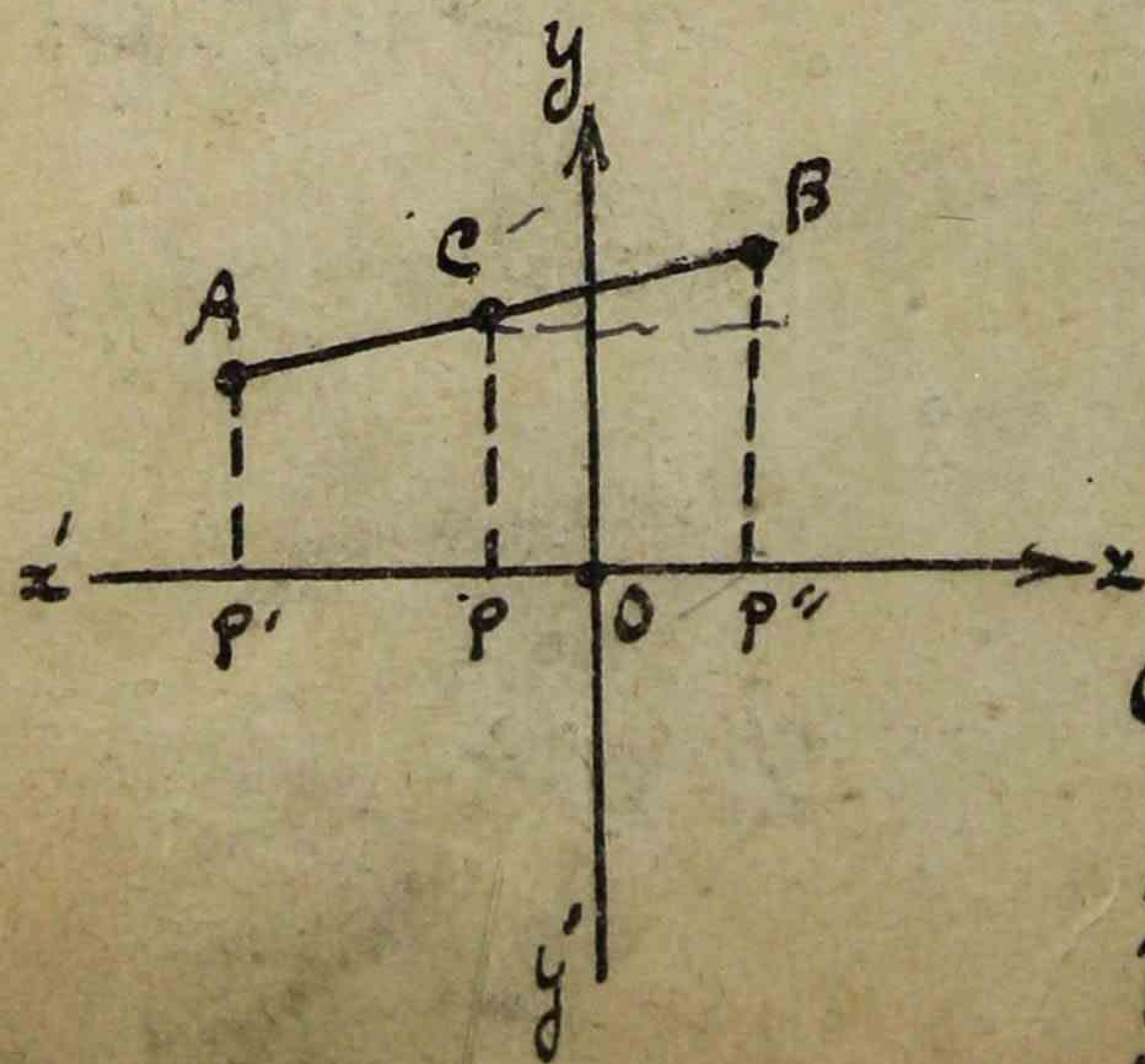
و از آنجا
$$AB = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

حالت مخصوص — فاصلهٔ نقطه از مبداء — چون مختصات مبدأ صفر است لذا فاصله هر نقطه $M(x, y)$ از مبدأ O عبارت میگردد از

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۱۰ — مختصات وسط خطی که مختصات طرفین آن معلوم باشد

دو نقطه مانند $A(x', y')$ و $B(x'', y'')$ را اختیار نموده و فرض میکنیم نقطه C وسط AB باشد چون مختصات C را x و y فرض نموده نقاط A و B و C را بر محور $x'x$ در نقاط P' و P'' و P تصویر کنیم بهر وضعی که نقاط مفروض اختیار شوند بر طبق رابطهٔ



مثال میتوان نوشت :

$\overline{OP'} + \overline{P'P} + \overline{PO} = 0$ ویا $\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{P'P}$ (۱)

$\overline{OP''} + \overline{P''P} + \overline{PO} = 0$ ویا $\overline{OP} = \overline{OP''} + \overline{P''P}$ (۲)

حال اگر روابط (۱) و (۲) را بایکدیگر جمع کنیم حاصل میشود :

$2\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{OP''}$ ویا $2x = x' + x''$

وازآنجا $x = \frac{x' + x''}{2}$ وهمچنین اگر نقاط مفروض را بر محور $y'y$ تصویر نموده بطریقه فوق عمل کنیم نتیجه میشود $y = \frac{y' + y''}{2}$ یعنی :

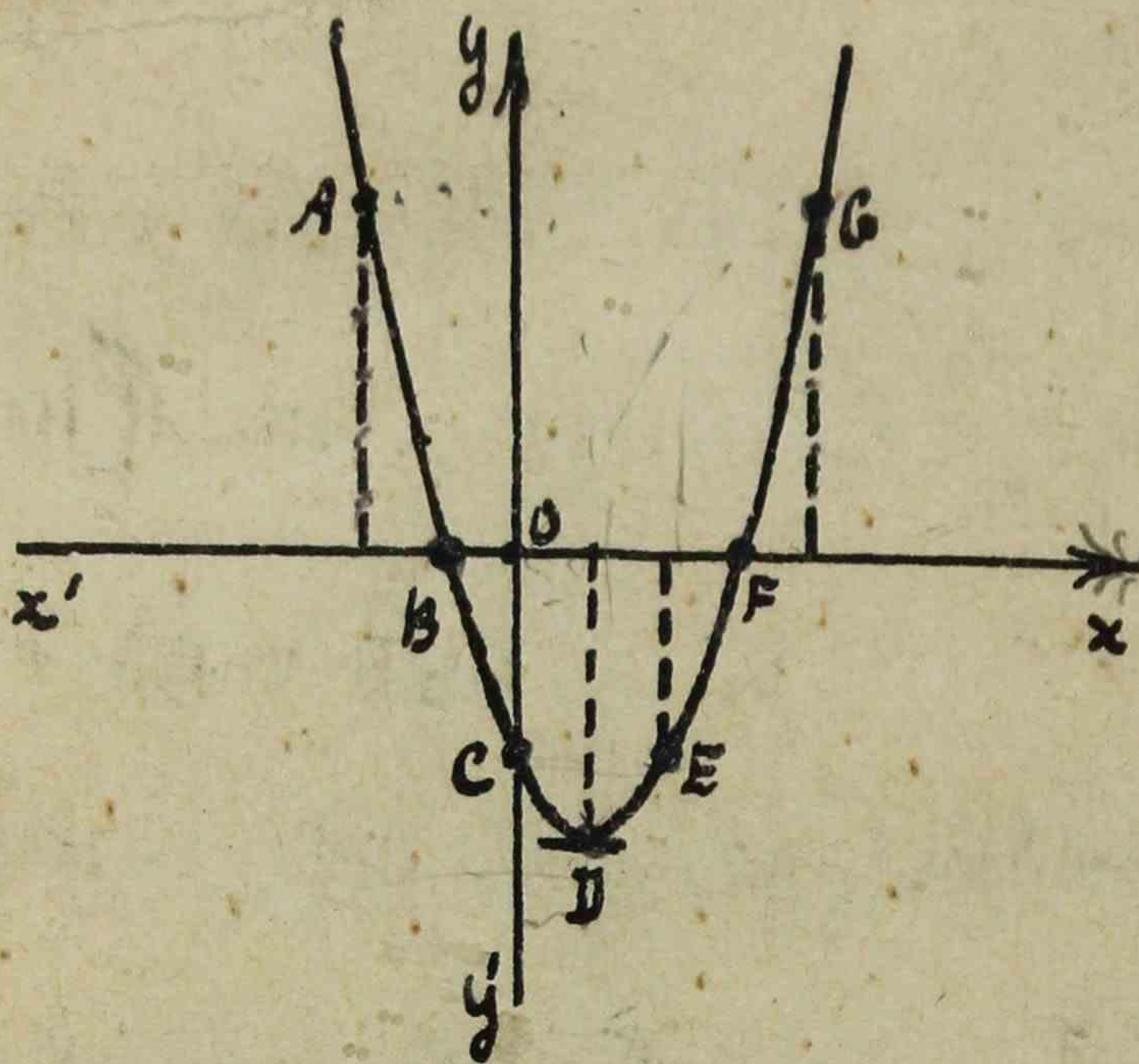
مختصات وسط هر خط واسطه عددیست مابین مختصات طرفین آن

۱۱- نمایش هندسی معادلات - تعبیر جبری بعضی خطوط - چون در معادلهٔ دومجهولی $y = x^2 - 2x - 3$ برای x مقادیر اختیاری مانند ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... فرض نموده ومقادیر نظیر آنها را برای y ازروی معادلهٔ فوق حساب نموده در جدول ذیل مرتب کنیم حاصل میشود :

x	...	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳	۴ .....
y	...	۵	۰	۳-	۴-	۳-	۰	۵ ....

حال اگر نقاط A و B و C و D و E و F و G و ... نظیر دستگاههای

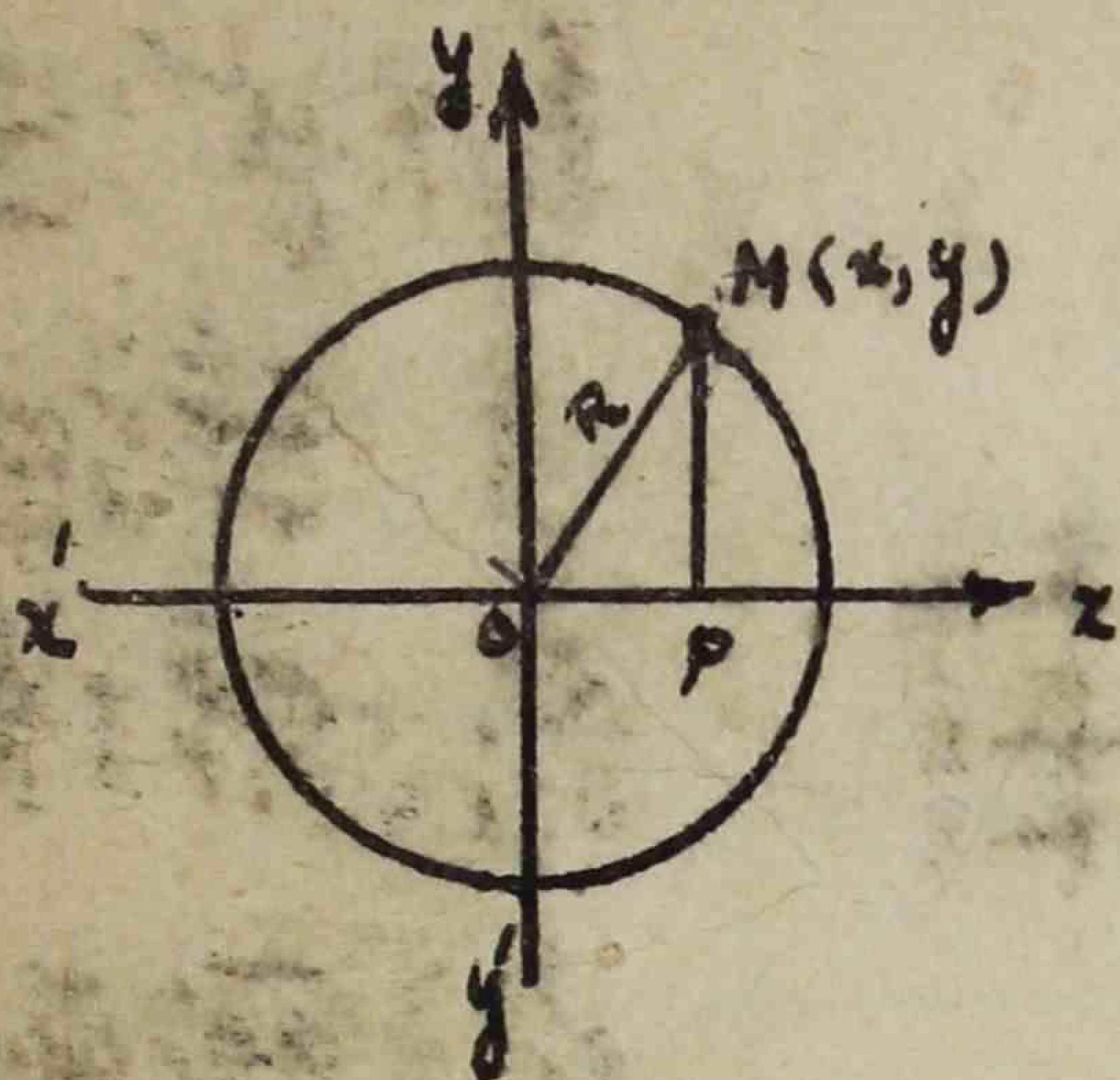
x و y فوق را که در معادلهٔ مفروض صدق مینمایند در سطح دو محور قائم $x'x$ و $y'y$ تعیین کنیم این نقاط که عدهٔ آنها بطور اختیار تا بینهایت ممکن است فرض شود من حیث المجموع تشکیل خطی را میدهند که آن را



نمایش هندسی معادلهٔ دو مجهولی $y = x^2 - 2x - 3$ مینامند و اختصاص این خط آنست که مکان نقاطی است که مختصات آنها در معادلهٔ مفروض صدق مینماید

ازاینقرار برای هر معادله بصورت $f(x, y) = 0$ میتوان بطریق فوق خطی که نمایش هندسی آنست رسم نمود و مابعدها در این کتاب قاعدهٔ کلی برای رسم این قبیل منحنیات بیان خواهیم نمود

بالعکس همواره ممکن است برای بعضی خطوط که بتوان آنها را تحت تعریف هندسی قرار داد تعبیر جبری بدست آورد که آنرا معادلهٔ آن خط مینامند مثلاً



چون دایرهٔ بشعاع معلوم R اختیار کنیم و دو قطر قائم آنرا محور مختصات قرار دهیم و نقطه غیر مشخص M را در روی آن اختیار نموده مختصات آنرا x و y فرض کنیم ملاحظه میشود که نظیر هر وضع نقطه M در روی دایرهٔ فوق بنا بتعریف دایره $\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$ ویا $x^2 + y^2 = R^2$ میباشد بطوریکه این معادله تعبیر جبری دایرهٔ فوق ویا بعبارة اخری معادلهٔ دایرهٔ بشعاع R نسبت بدو محوری که دو قطر قائم آن باشد خواهد بود

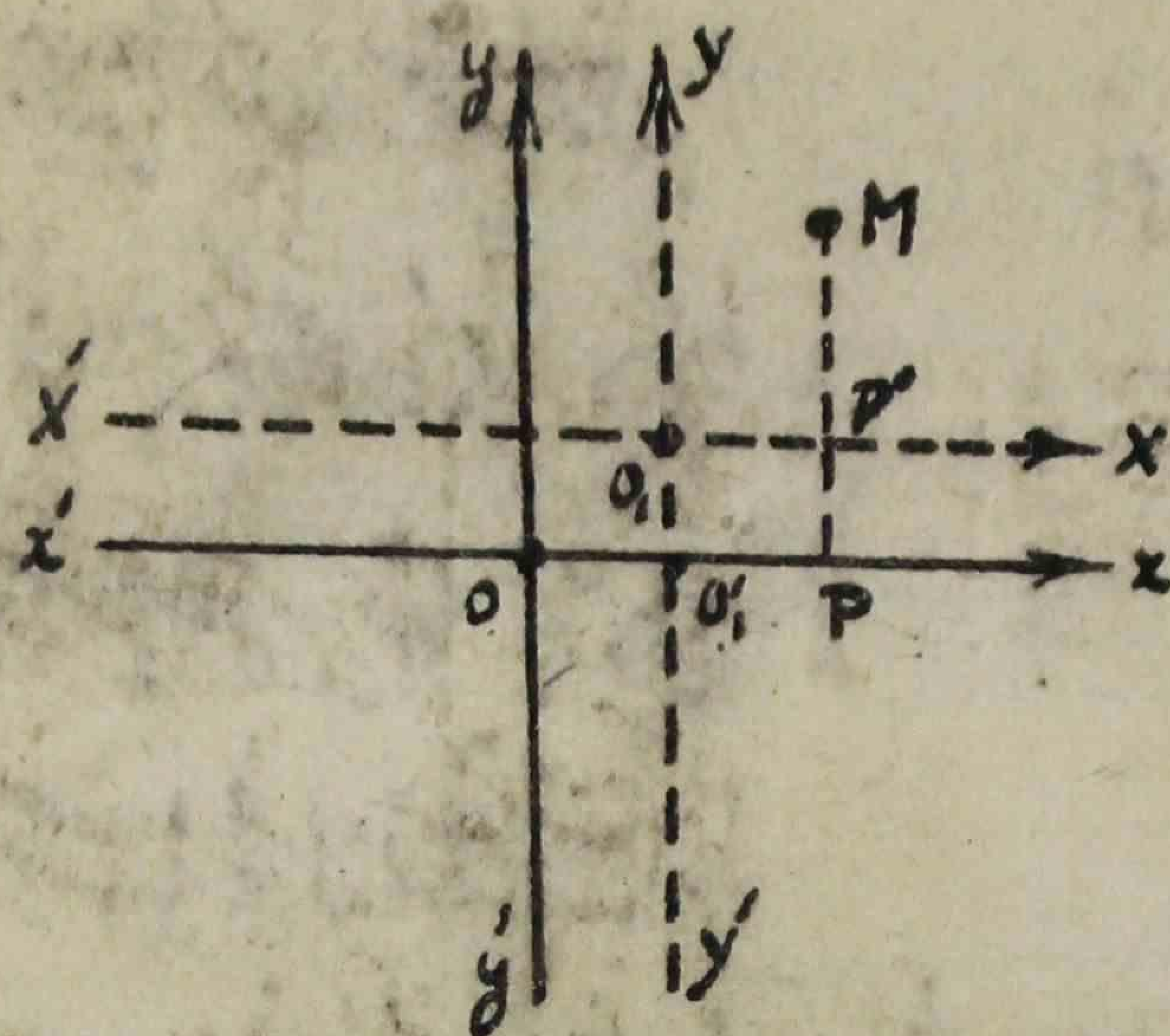
۱۲ـ **تغییر محور مختصات** — دو محور قائم $x'x$ و $y'y$ و نقطه $M(x, y)$ را فرض میکنیم

حال اگر دو محور را بموازات خود حرکت دهیم تا بوضع $X'X$ و $Y'Y$ و بنابراین مبدأ مختصات بوضع O_1 درآید نقطهٔ M نسبت بدستگاه دو محور جدید دارای مختصات جدیدی میباشد که آنرا X و Y فرض مینمائیم و چون مختصات مبدأ جدید O_1 را نسبت بدستگاه قدیم a و b فرض کنیم برطبق

رابطه مثال بازاء هر مقدار

مثبت و منفی a و b

میتوان نوشت :



$\overline{OO_1'} + \overline{O_1'P} + \overline{PO} = 0$

ویا $\overline{O_1P} = \overline{O_1P'} = \overline{OP} - \overline{OO_1'}$

ویا $X = x - a$

همچنین $\overline{PP'} + \overline{P'M} + \overline{MP} = 0$

ویا $\overline{P'M} = \overline{PM} - \overline{PP'}$ ویا $Y = y - b$

بطوریکه میتوان گفت :

مختصات نقطه مفروض M نسبت بدستگاه جدیدی بمبدأ O_1 برابر است با تفاضل مختصات نظیر نقاط M و O_1 نسبت بدستگاه قدیم

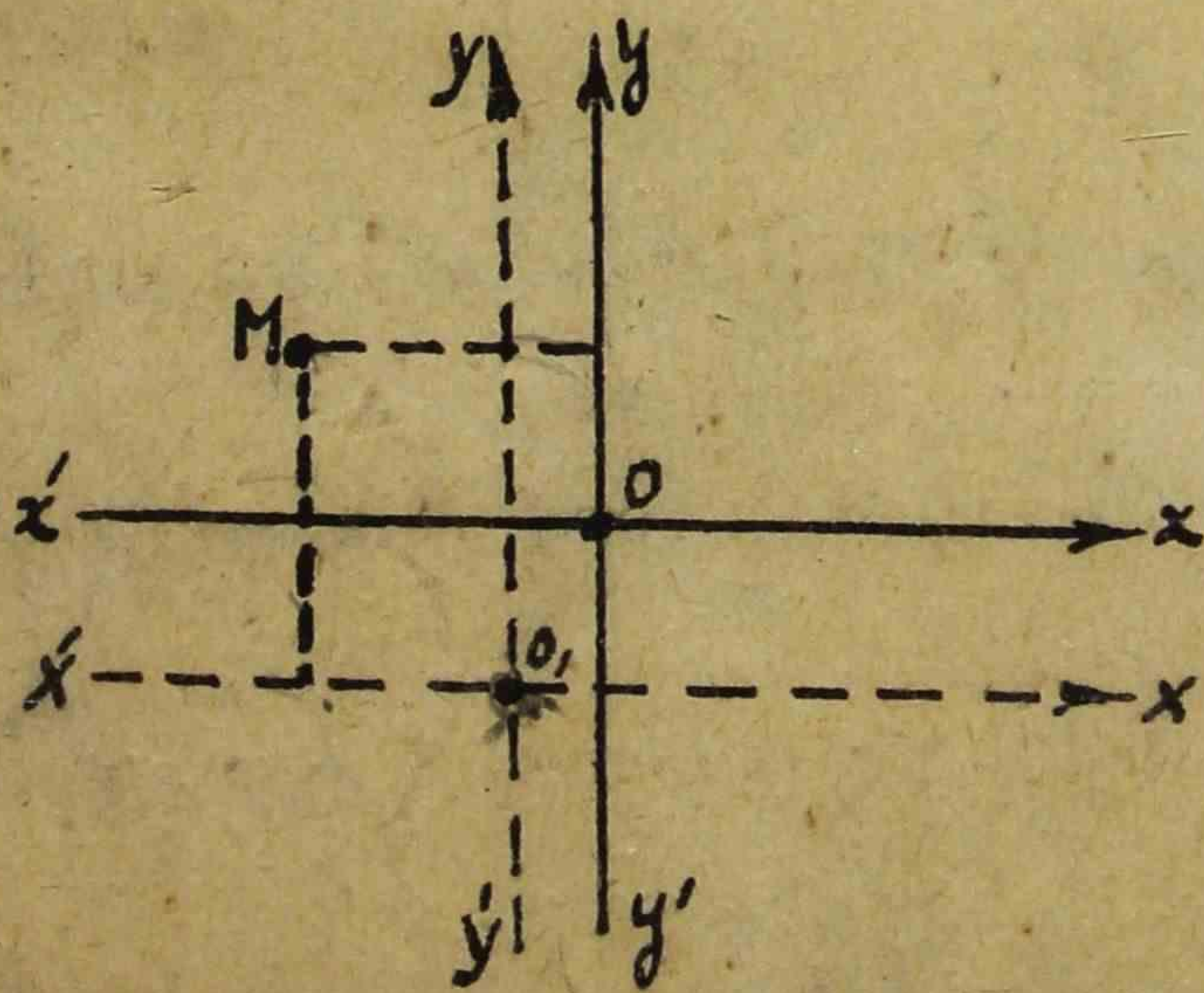
حالات مخصوص - در حالتی که فقط محور $x'x$ بموازات خود حرکت نماید و بعبارة اخری مبدأ در روی محور yها تغییر مکان دهد طول مبدأ جدید همواره مساوی صفر بوده و چون عرض آنرا نسبت بدستگاه قدیم b فرض

کنیم مختصات جدید نقطه M عبارت میگردد از $\begin{vmatrix} X = x \\ Y = y - b \end{vmatrix}$

وهمچنین اگر فقط محور $y'y$ بموازات خود حرکت نماید یعنی مبدأ در روی محور x ها تغییر مکان دهد عرض مبدأ جدید مساوی صفر و چون طول آن نسبت بدستگاه قدیم a فرض کنیم مختصات جدید نقطه M عبارت میگردد از :

$$\begin{vmatrix} X = x - a \\ Y = y \end{vmatrix}$$

مثال ۱ - فرض میکنیم مختصات نقطه M نسبت بدو محور قائم ۳- و ۲ باشد بنابر آنچه گفتیم هرگاه دو محور بموازات خود حرکت نمایند بطریقی که مختصات مبدأ جدید O_1 نسبت بدستگاه قدیم ۱- و ۲- گردد مختصات جدید نقطه M عبارت میگردد



از $X = -3 + 1 = -2$

و $Y = 2 + 2 = 4$

مثال ۲ - هرگاه در منحنی $y = x^2 - 2x - 3$

که آنرا قبلاً رسم نموده‌ایم فرض کنیم که دو محور بموازات خود حرکت نموده و مبدأ جدید نقطه $A(-2, 5)$ گردد چون مختصات جدید نقاط منحنی را X و Y

فرض کنیم بنا بر آنچه گفتیم میتوان نوشت : $\begin{cases} X = x+۲ \\ Y = y-۵ \end{cases}$ و از آنجا $\begin{cases} x = X-۲ \\ y = Y+۵ \end{cases}$

که چون در معادلهٔ مفروض قرار دهیم حاصل میشود $y+۵ = (X-۲)^۲ - ۲(X-۲) - ۳$

و یا پس از اختصار $Y = X^۲ - ۶X$

که معادلهٔ جدید منحنی است نسبت بدو محور $X'X$ و $Y'Y$ بمبدأ A

مسائل

۱- نقاط ذیل را در سطح دو محور قائم تعیین کنید :

A (۳و۰) B (۰و−۲) C (۱و۵)

D (−۳و−۴) E (۲و−۲) F (−۴و+۳)

۲- مختصات قرینهٔ نقاط فوق را اولاً نسبت بمحور $x'x$ ثانیاً نسبت بمحور $y'y$ ثالثاً نسبت بمبدأ O معلوم کنید

۳- دو نقطهٔ P و Q در روی محور $x'x$ اولی بطول ۳− و دومی بطول ۱ مفروض است مطلوب است محاسبهٔ قطعات $\overline{PQ}$ و $\overline{QP}$

۴- هرگاه طول P را p و Q را q فرض کنیم قطعات فوق را حساب کنید

۵- نقاط A (۴و۱) و B (۰و−۳) و C (−۲و۱) و D (−۳و−۶) مفروضند فاصلهٔ آنها را از یکدیگر و همچنین از مبدأ O حساب کنید

۶- مختصات اوساط قطعه خطهای مسئله قبل را معلوم کنید

۷- مختصات رؤوس مثلثی عبارتست از (۳ و ۳) A و (۰ و ۱-) B و (۴- و ۲) C مطلوبست اولاً رسم مثلث ثانیاً محاسبهٔ طول اضلاع و محیط آن ثالثاً محاسبهٔ طول میانهٔ AH

۸- نمایش هندسی معادلات ذیل را بوسیلهٔ تعیین یک عدهٔ نقاط آن بطور تقریب رسم نمائید

$2x + 3y = 4$ $x - y = 1$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ $x^2 + y^2 = 4$

$y = (x-2)^2$ $y^2 = 4x$

۹- نقاط (۲,-۱) A و (۳-, ۵) B مفروضند فرض میکنیم یک یا هر دو محور بموازات خود تغییر مکان دهند بطریقیکه مختصات مبدأ جدید اولاً نقطه (۴- و ۵) O_1 ثانیاً نقطه (۰ و ۲) O_2 ثالثاً (۴ و ۳-) O_3 گردد دراینصورت مختصات جدید نقاط را حساب کنید

۱۰- معادلات جدید خطوط و منحنیات مسئله نمره ۸ را هرگاه مبدأ مختصات نقاط O_1 و O_2 و O_3 باشد معلوم نمائید

خط مستقیم

۱۳ـ نمایش هندسی معادلات درجه اوّل ـ قضیه ـ

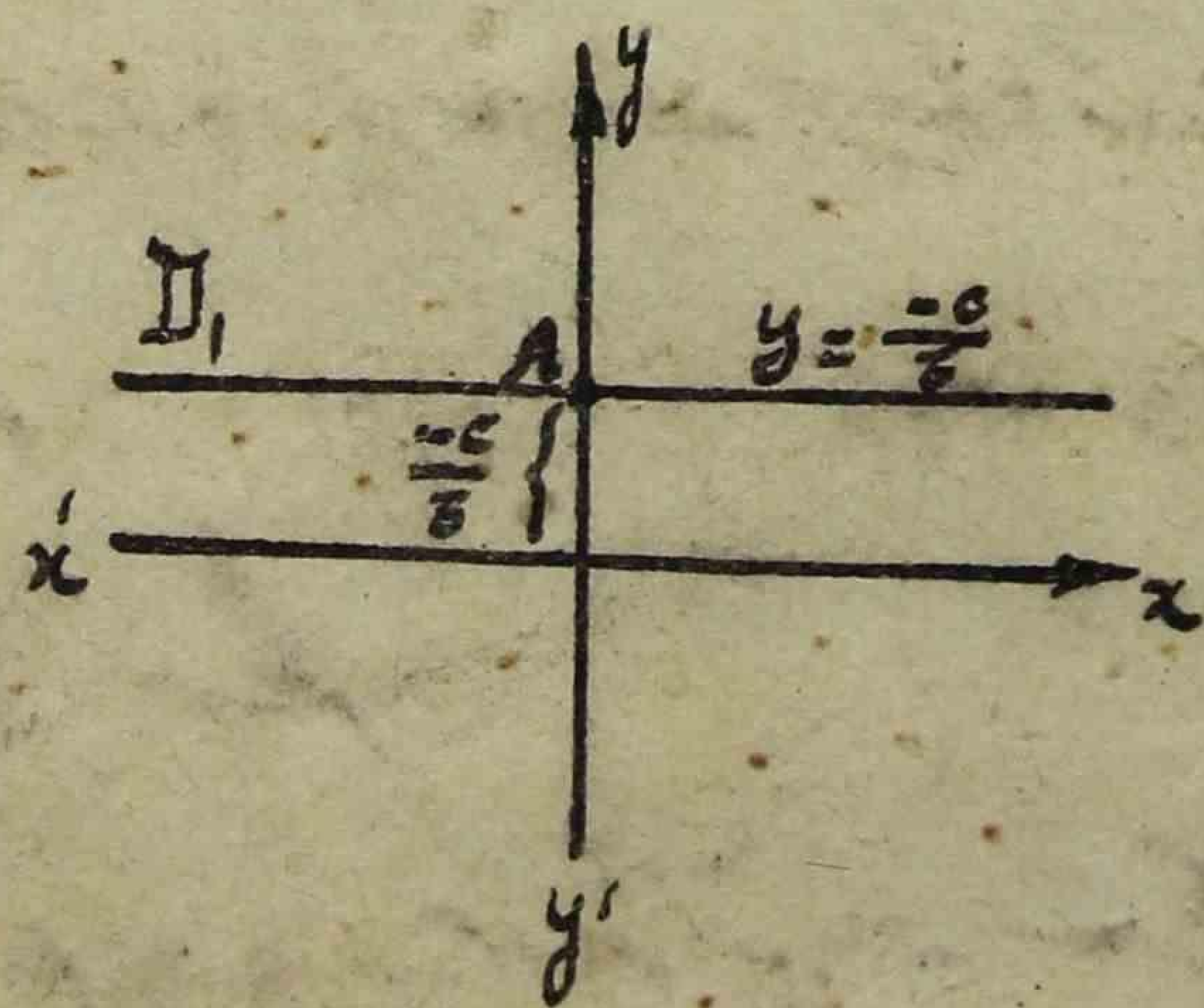
مکان نقاط واقعه در سطح دو محور قائم که مختصّات آنها در معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ اوّل $ax + by + c = 0$ صدق نماید خطی است مستقیم

اثبات ـ در معادلهٔ فوق بر وفق آنکه a یا b یا c مساوی یا مخالف صفر باشند حالات مختلف میتوان تشخیص داد ازین قرار :

حالت اوّل ـ فرض میکنیم فقط $a = 0$ باشد در این حالت معادله

بصورت $by + c = 0$ (۱)

وازآنجا $y = \frac{-c}{b}$



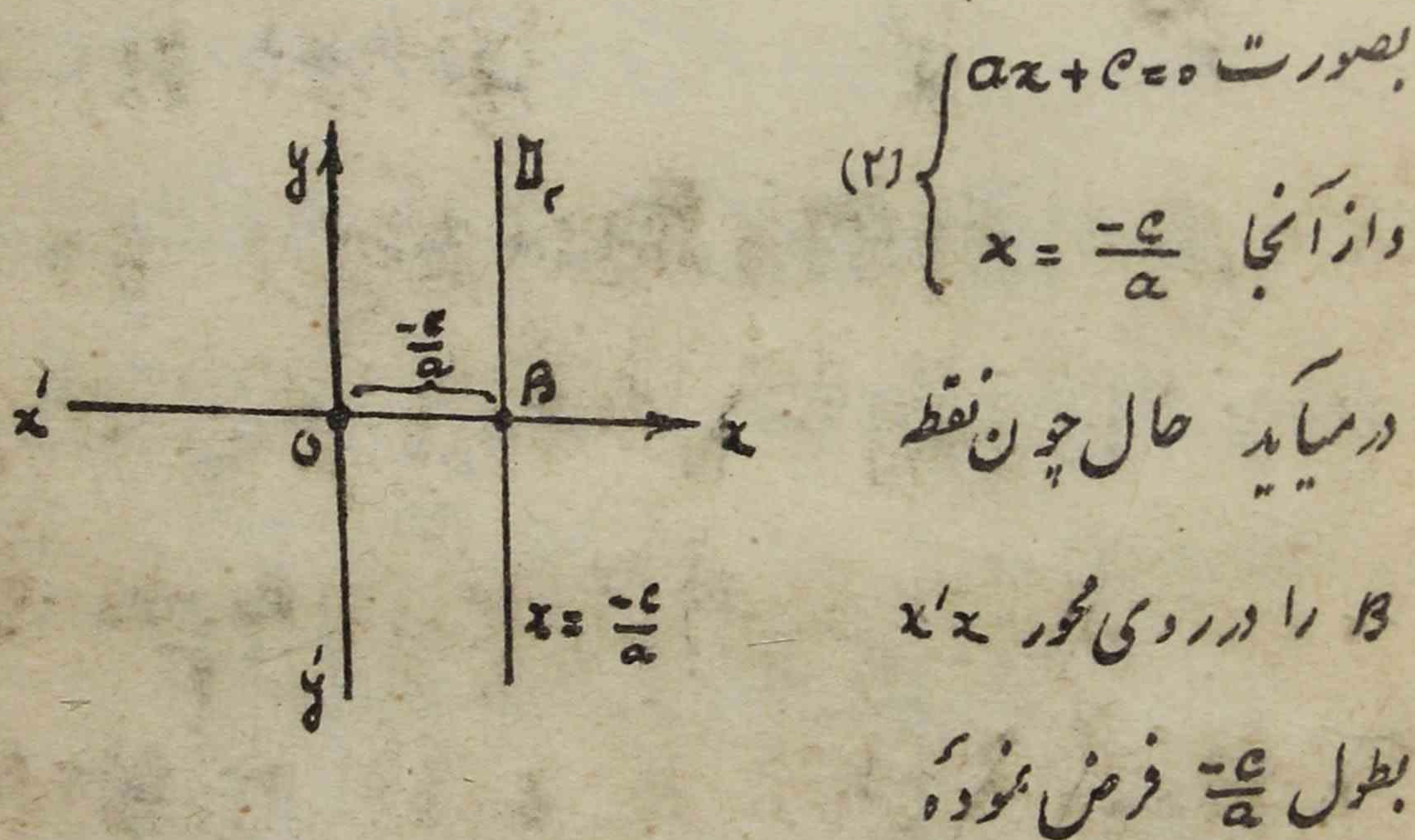
در میاید حال اگر نقطهٔ A را در روی محور $y'y$ بعرض $\frac{-c}{b}$ اختیار نموده ازاین نقطه خط D_1 راموازی محور $x'x$ رسم کنیم این خط مکان نقاطی خواهد بود که مختصات آنها در معادلهٔ (۱) صدق مینماید زیرا بسهولت ملاحظه میشود که اوّلاً جمیع نقاطی

که مختصات آنها در معادله (۱) صدق مینماید در روی این خط واقع بوده و ثانیاً مختصات جمیع نقاط این خط در معادله (۱) صدق مینماید

حالت مخصوص — چون در رابطه (۱) فرض کنیم $c = 0$ باشد معادله بصورت $y = 0$ در میآید و درینصورت مکان مطلوب محور $x'x$ خواهد بود

حالت دوّم — فرض میکنیم فقط $b = 0$ باشد در اینحالت معادله

بصورت $ax + c = 0$
(۲)
و از آنجا $x = \frac{-c}{a}$



در میآید حال چون نقطه B را در روی محور $x'x$ بطول $\frac{-c}{a}$ فرض نموده

از این نقطه خط D را موازی محور $y'y$ رسم کنیم این خط مکان نقاطی میباشد که مختصات آنها در معادلهٔ (۲) صدق مینماید چه بسهولت دیده میشود که اولاً جمیع نقاطی که مختصات آنها در معادله (۲) صدق مینماید در روی این خط واقع بوده و ثانیاً مختصات جمیع نقاط این خط در معادله (۲) صدق میکند

حالت مخصوص — چون در معادله (۲) فرض کنیم $c = 0$ باشد

معادله بصورت $x=0$ درمیآید و دراینصورت مکان محور $y'y$ میباشد

حالت سوم - فرض میکنیم فقط $c=0$ باشد در اینحالت معادله

بصورت

$$(۳)\begin{cases} ax+by=0 \\ y=\frac{-a}{b}x=mx \end{cases}$$

و یا

درمیآید حال چون در معادله اخیر فرض کنیم $x=1$ باشد حاصل میشود

$y=m$ و چون نقطه $M(\overline{OP}=1, \overline{PM}=m)$ را در سطح دو محور قائم اختیار نموده این نقطه را بمبدأ O که مختصات آن نیز در رابطه (۳) صدق مینماید بخط مستقیم D_3 وصل کنیم این خط مکان مطلوب میباشد زیرا:

اولاً هرگاه نقطهٔ مانند $M'(x',y')$ را فرض کنیم بطریقی که مختصات آن در رابطه (۳) صدق نماید یعنی $y'=mx'$ باشد این نقطه در روی خط D_3 واقع میگردد چه اگر فرض کنیم $\overline{OP'}=x'$ و $\overline{P'M'}=y'$ باشد بنابفرض $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}=\frac{m}{1}=m$ میباشد و ازطرفی $\frac{\overline{P'M'}}{\overline{OP'}}=\frac{y'}{x'}=m$ و بالنتیجه $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{P'M'}}{\overline{OP'}}$ خواهد بود بطوریکه دو مثلث OPM و $OP'M'$ در زوایای P و P' قائمه و مساوی بوده و اضلاع طرفین زوایای مساوی



آنها متناسب میباشند بنابراین دو مثلث متشابه وزاویه $\widehat{MOP} = \widehat{M'OP'}$ میگردد بطوریکه نقطه M' باید برخط D_1 ویا برقرینه آن نسبت بمحور $x'x$ واقع گردد ولی چون قطع نظر از قدر مطلق اندازه جبری نسبتهای فوق نیز مساوی است لذا نقطه M' باید براستداد خط D_1 واقع شده ونمیتواند برقرینه این خط واقع گردد

ثانیاً هر نقطه مانند $M'(x', y')$ درروی خط D_1 فرض کنیم مختصات آن درمعادله (۳) صدق مینماید چه از تشابه دو مثلث OPM و $OP'M'$ حاصل میشود

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{OP'}} \quad \text{ویا} \quad \frac{y'}{x'} = \frac{m}{1}$$

وازآنجا $y' = mx'$

ضریب زاویه خط $y = mx$ — بطوریکه ملاحظه میشود خط $y = mx$ خط مستقیمی است که برمبدأ مرورمینماید وبسهولت دیده میشود که امتداد این خط بستگی بمقدار m ویاضریب x دارد چه اگر زاویه این خط را باجهت مثبت محور $x'x$ α فرض کنیم حاصل میشود $\frac{y}{x} = m = tg\,\alpha$ بطوریکه زاویه α که امتداد خط را مشخص مینماید برحسب m تغییر میکند بهمین مناسبت است که m را **ضریب زاویه خط** مینامند

حالت چهارم – فرض میکنیم a و b و c هیچیک مساوی صفر نباشند دراینصورت چون معادله را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود :

$$(4)\begin{cases} y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \\ \text{ویا} \quad y = mx + n \end{cases}$$

حال چون خط $y = mx$ را که بر مبدا O مرور مینماید رسم نموده واز نقطهٔ O در روی محور $y'y$ قطعه OA را مساوی n جدا کنیم واز نقطه A خط D_4 را بموازات آن رسم کنیم این خط مکان نقاطی میباشد که مختصات آنها در معادلهٔ (۴) صدق مینماید زیرا :

اولاً اگر نقطهٔ مانند $M(x', y')$ فرض کنیم بطریقی که مختصات آن در معادلهٔ (۴) صدق نماید یعنی $y' = mx' + n$ باشد این نقطه در روی خط D_4 واقع میگردد چه اگر نقطه P را در روی $x'x$ بطول $OP = x'$ اختیار نموده ازاین نقطه عمودی بر $x'x$ اخراج کنیم نقطه تقاطع این خط با خط D_4 نقطه M میباشد زیرا $y' = mx' + n = \overline{NM} + \overline{PN} = \overline{PM}$

خواهد بود .

ثانیاً هر نقطه مانند $M(x', y')$ در روی خط D_1 اختیار کنیم مختصات آن در معادله (۴) صدق مینماید زیرا چون از M عمودی بر محور xx اخراج کنیم $PM' = y' = PN + NM = mx' + n$ میباشد

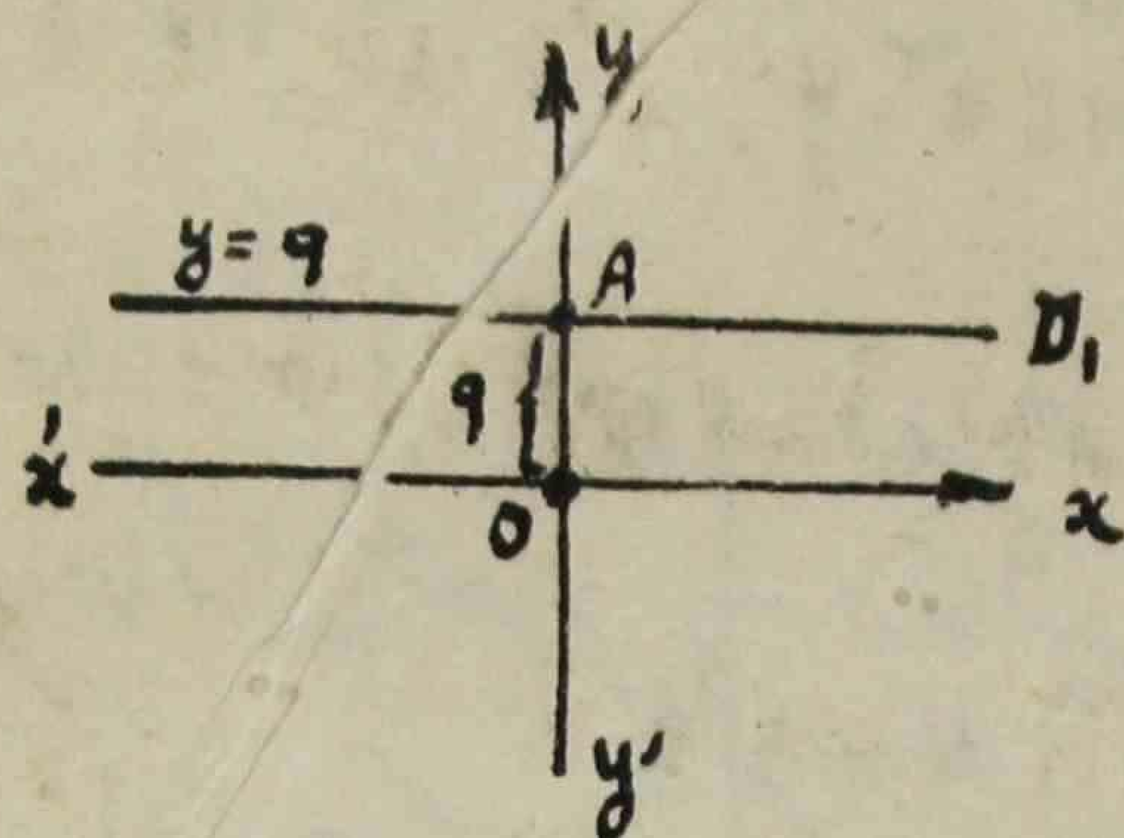
طول و عرض از مبدأ خط — خط D_1 دو محور را در نقاط A و B قطع مینماید قطعه OB را طول از مبدأ و قطعه OA را عرض از مبدأ خط مینامند از اینقرار عرض از مبدأ خط عرض نقطه از خط است بطول $x = 0$ و طول از مبدأ آن طول نقطه از خط است بعرض $y = 0$ بطوریکه برای بدست آوردن طول و عرض از مبدأ خطی کافیست که x و y را در معادله خط مساوی صفر قرار دهیم مثلاً عرض از مبدأ خط $y = mx + n$ عبارتست از n و طول از مبدأ آن عبارتست از $\frac{-n}{m}$

۱۴ — **قضیه عکس** — **تعبیر جبری خطوط مستقیم** — هر خط مستقیمی را میتوان بیک معادله درجه اول نمود

اثبات — خط مستقیم ممکن است با یکی از دو محور موازی بوده و یا آنها را در یک یا دو نقطه قطع نماید بنابراین برحسب اوضاع مختلفه خط حالات ذیل

میتوان تشخیص داد

حالت اوّل ـ فرض میکنیم



خط D_1 موازی محور $x'x$ بوده

ومحور $y'y$ را در نقطه A بعرض

$OA = 9$ قطع نموده باشد

درایصورت معادلهٔ $y = 9$ معادله خط D_1 خواهد بود چه بسهولت دیده میشود

که مختصات جمیع نقاط این خط در معادله $y = 9$ صدق میکند وبالعکس هر

نقطه که مختصات آن در این معادله صدق کند در روی این خط واقع میگردد

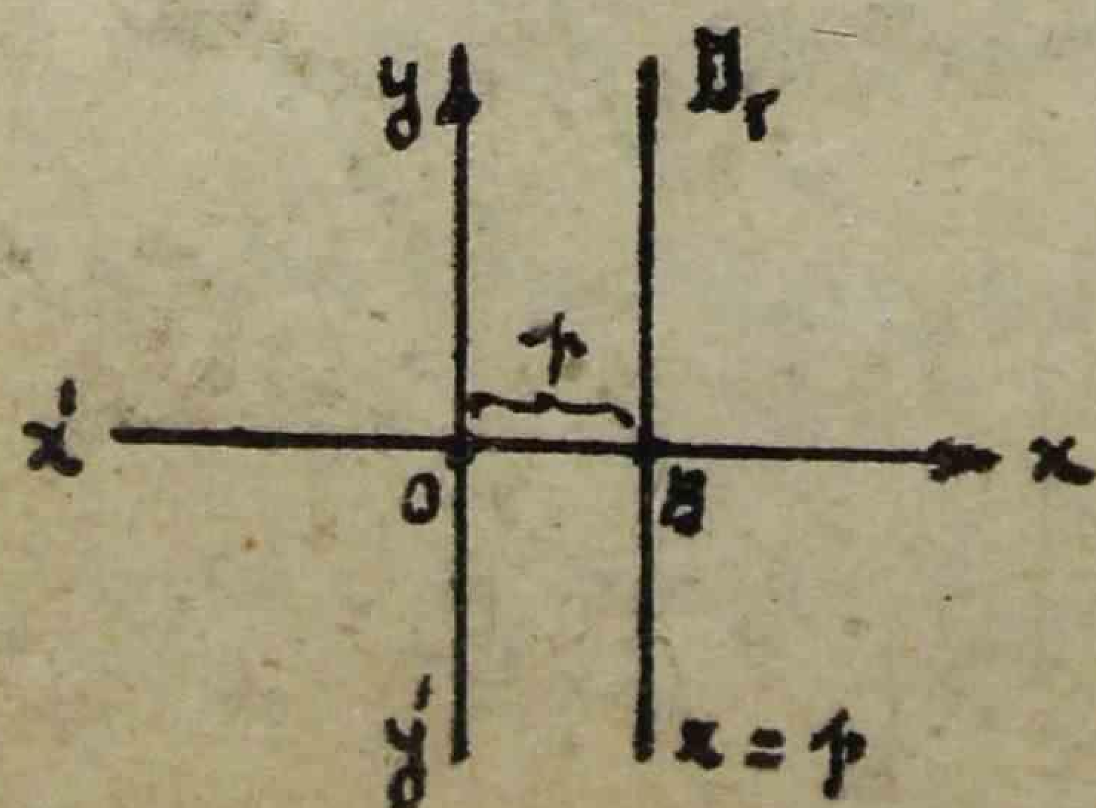
حالت مخصوص ــ درصورتیکه نقطه A با مبدأ O مشتبه باشد خط بر محور

$x'x$ منطبق میگردد بطوریکه معادلهٔ محور $x'x$ عبارتست از $y = 0$

حالت دوم ــ فرض میکنیم خط D_2 موازی محور $y'y$ بوده ومحور

$x'x$ را در نقطه بطول

$OB = 4$ قطع نموده باشد



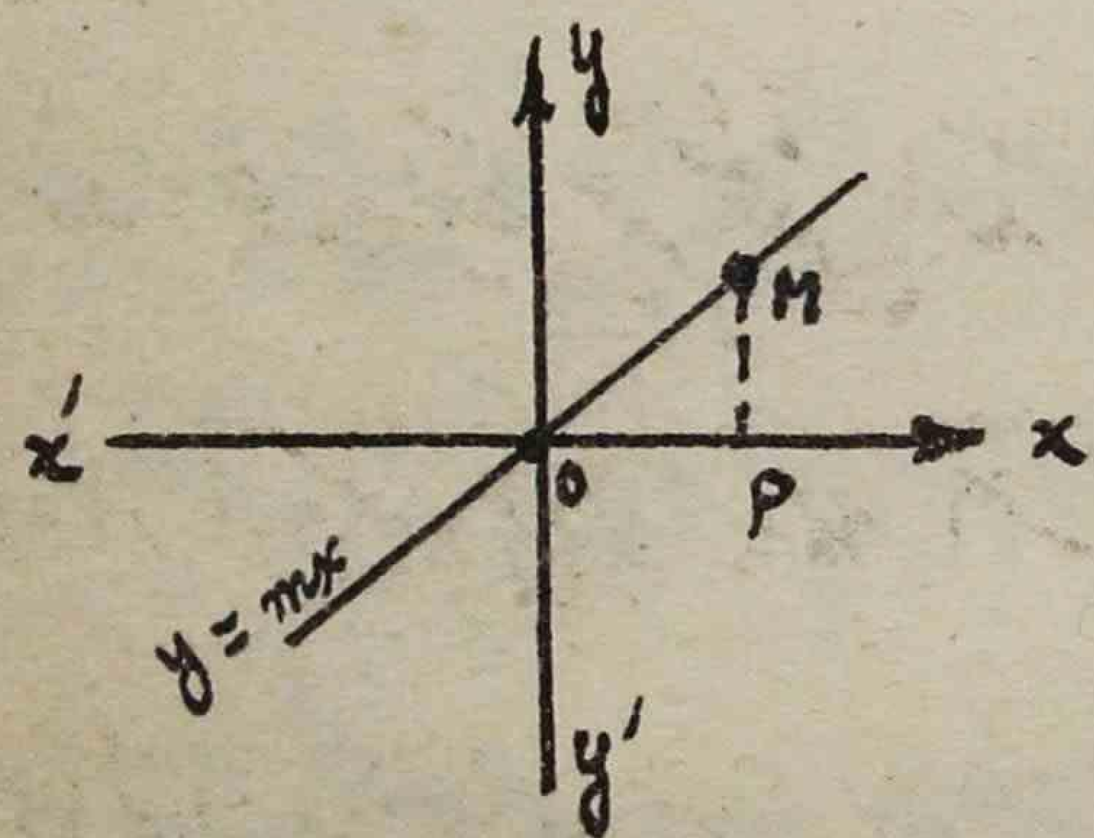
دراینحالت معادلهٔ این خط

$x = 4$ خواهد بود چه

بسهولت ملاحظه میشود که مختصات جمیع نقاط این خط در معادله $x = p$ صدق نمود و بالعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله $x = p$ صدق کند در روی این خط واقع میباشد

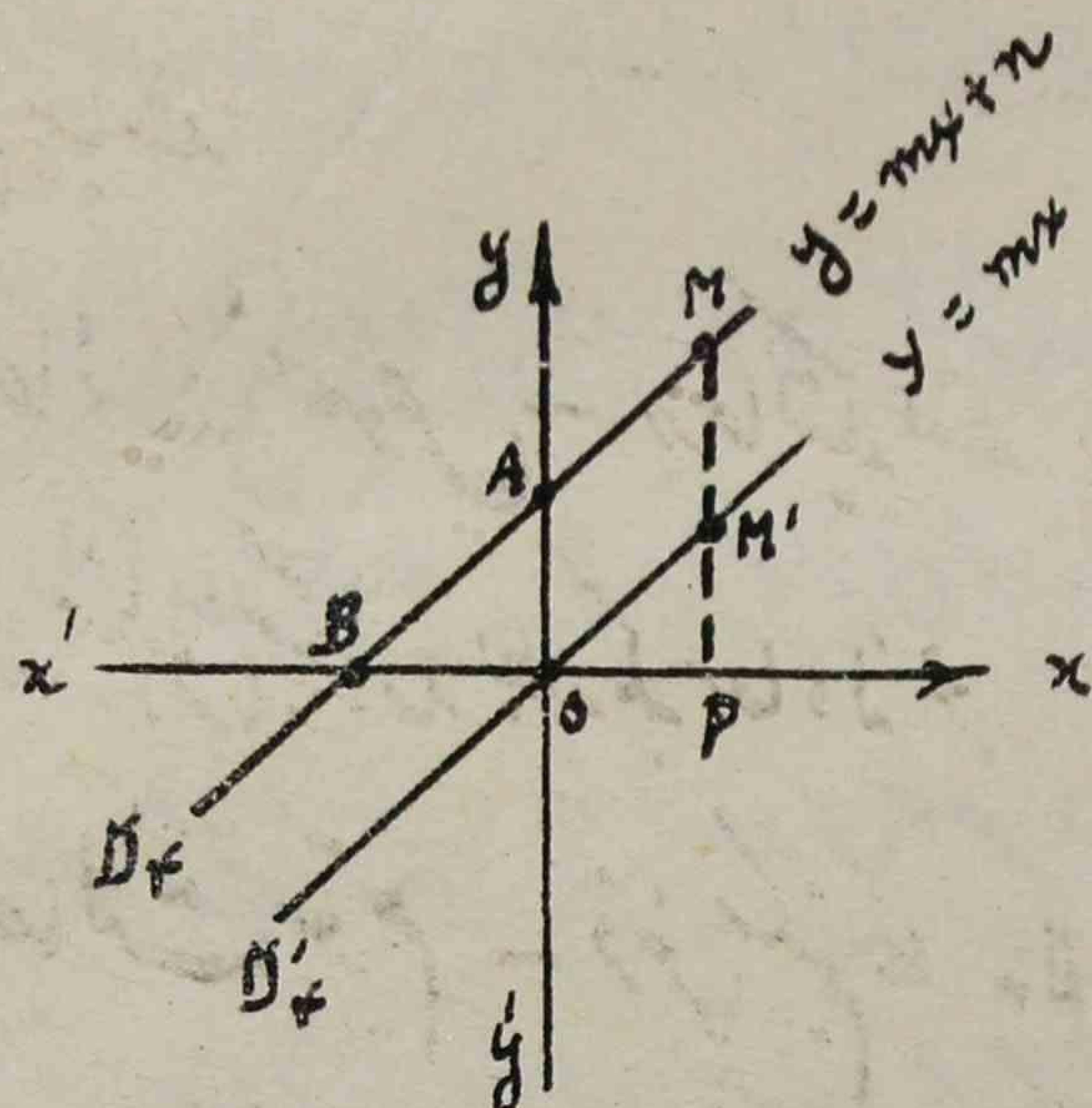
حالهٔ مخصوص — در حالتیکه نقطه B با مبدا O مشتبه باشد خط بر محور yy' منطبق میگردد بطوریکه معادلهٔ محور $y'y$ عبارت میگردد از $x = 0$

حالت سوم — فرض میکنیم خط LL' بر مبدا O مرور نماید در اینصورت



چون نقطه غیر مشخص $M(x, y)$ را در روی آن فرض نموده MP را بر $x'x$ عمود کنیم از مثلث OPM حاصل میشود $\frac{PM}{OP} = \frac{y}{x} = tg\alpha = C^{te} = m$ و از آنجا $y = mx$ بطوریکه مختصات هر یک از نقاط خط LL' در معادله $y = mx$ صدق مینماید و همچنین بطریقی مشابه با آنچه در حالت سوم نمره ۱۳ بیان نمودیم میتوان تحقیق نمود که هر نقطه که مختصات آن در رابطه $y = mx$ صدق نماید در روی این خط واقع میگردد بطوریکه معادله این خط $y = mx$ میباشد

حالت چهارم — فرض میکنیم خط D_4 دو محور را در نقاط A و B قطع نموده باشد در این صورت چون از مبدأ O خط D'_4 را بموازات آن رسم کنیم بروفق آنچه میدانیم معادلهٔ این خط بصورت $y = mx$ میباشد



و چون نقطهٔ غیرمشخص مانند $M(x, y)$ را در روی خط D_4 اختیار نموده از آن عمودی بر $x'x$ اخراج کنیم تا خط D'_4 را در نقطه N قطع کند دو نقطه M و N متناظر بیک طول بدست میآید ولی چون همواره $\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM}$ میباشد بنابراین اگر طول ثابت $\overline{NM} = \overline{OA}$ را که عرض از مبدأ خط D_4 است مساوی n فرض کنیم در رابطه فوق حاصل میشود $y = mx + n$ بطوریکه معادلهٔ خط D_4 عبارت میگردد از

$$y = mx + n$$

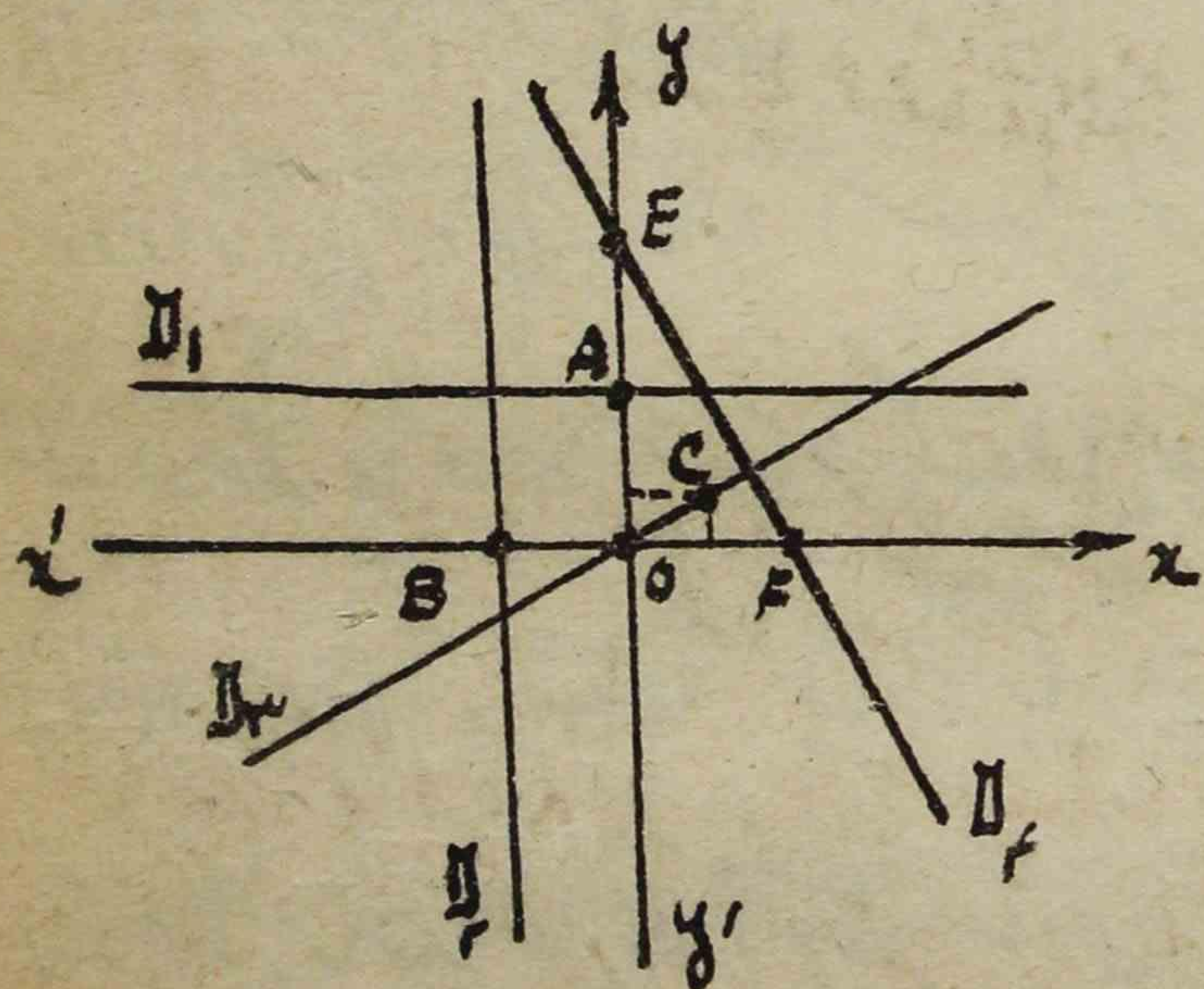
ترسیم خط

۱۵ – برای ترسیم خط $ax + by + c = 0$ بترتیب ذیل عمل میکنیم

۱- فرض میکنیم ضریب x مساوی صفر باشد مثلاً مقصود رسم خط $3y-6=0$ باشد درانیصورت چون معادله رانسبت به y حل کنیم حاصل میشود $y=\frac{6}{3}=2$

حال از مبدأ o درروی محور $y'y$ طول $\overline{OA}$ رامساوی ۲ واحد مقیاس جدا نموده ازاین نقطه خط D_1 راموازی محور $x'x$ رسم مینمائیم

۲ - فرض میکنیم ضریب y مساوی صفر باشد مثلاً مقصود رسم خط $2x+3=0$ باشد درانیصورت چون معادله رانسبت به x حل کنیم حاصل میشود $x=\frac{-3}{2}$



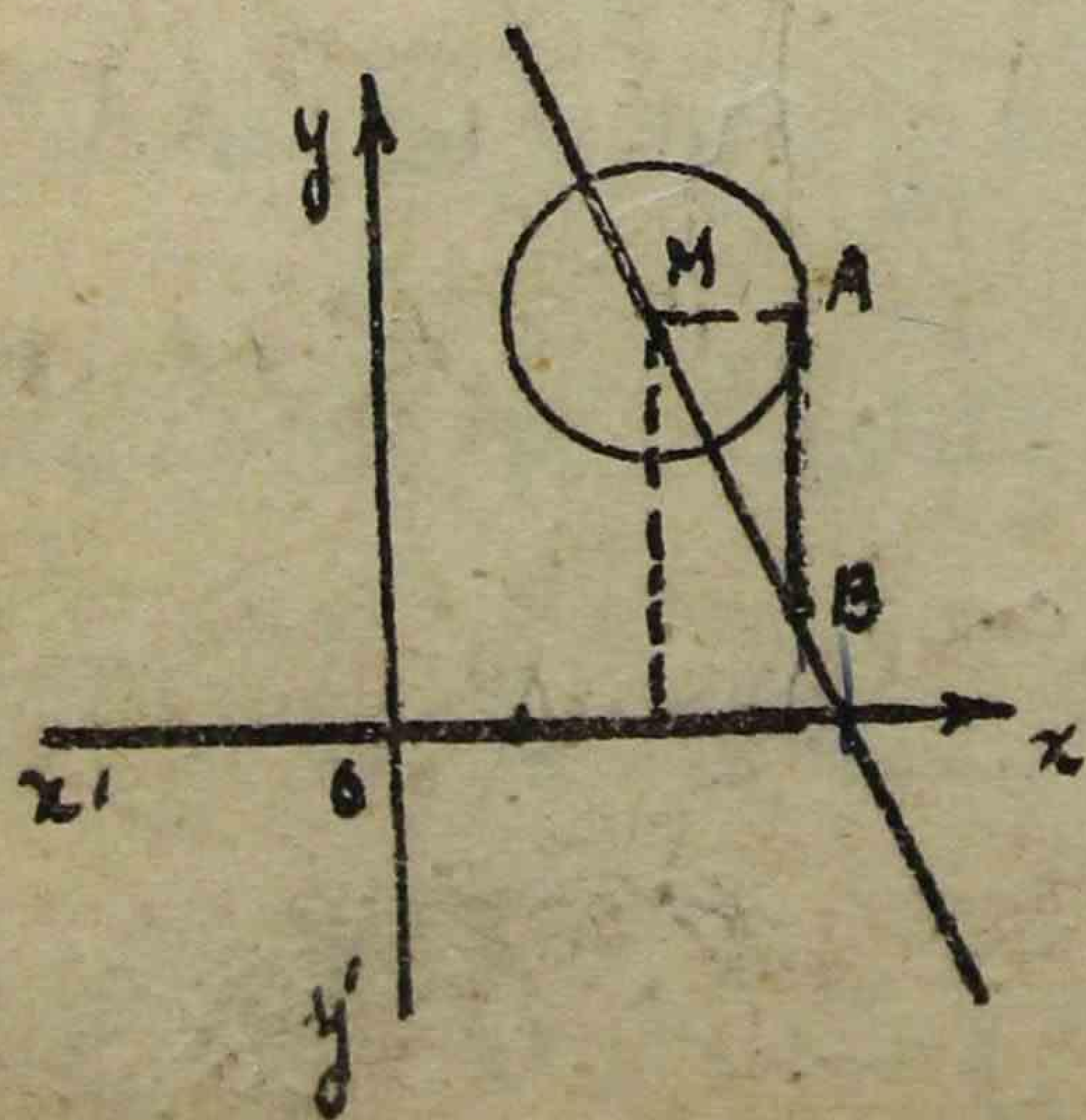
حال از مبدأ o درروی محور $x'x$ طول $\overline{OB}$ رامساوی $\frac{-3}{2}$ جدا نموده از نقطه B خط D_2 راموازی محور $y'y$ رسم مینمائیم

۳- فرض میکنیم جمله معلوم مساوی صفر باشد مثلاً مقصود رسم خط $2x-3y=0$ باشد درانیصورت بروفق آنچه میدانیم خط فوق برمبدأ مرورمینماید بنابراین تشخیص یک نقطه دیگر آن کفایت میکند برای این کار درمعادله فوق x رامساوی ۱ فرض میکنیم

تا حاصل شود $y = \frac{3}{2}$ وچون نقطه $(\frac{3}{2} \text{ و } 1)$ C را تعیین نموده بمبدأ
O وصل کنیم خط مطلوب D_3 رسم میشود

۴ - فرض میکنیم هیچیک از ضرائب صفر نباشد مثلاً مقصود رسم خط
$2x + y - 4 = 0$ باشد دراین حالت برای سهولت اغلب نقاط تقاطع
خط را با دو محور تعیین مینمایند برای این کار در معادلهٔ مفروض x را مساوی
صفر فرض میکنیم تا حاصل شود $y = 4$ و y را مساوی صفر فرض میکنیم تا حاصل شود $x = 2$ وچون
نقاط E و F را با شرایط فوق تعیین نموده بیکدیگر وصل کنیم خط مطلوب
D_4 بدست میآید

۱۶ - رسم خطی که یک نقطهٔ آن معلوم بوده وعلاوه ضریب زاویهٔ آن نیز در دست باشد



فرض میکنیم مقصود رسم خطی باشد که بر نقطه
M(۳ و ۲) با ضریب زاویه ۲-
مرور نماید ابتدا نقطه M را تعیین نموده
وبرای مشخص نمودن امتداد خط بمرکز
M وبشعاع واحد دایره رسم میکنیم وبعد از نقطه A منتهی الیه شعاع MA که

موازی و متحد الجهة با $x'x$ اختیار میشود محوری موازی و متحد الجهة با $y'y$
رسم نموده از مبدا، A در روی آن طول AB را مساوی ۲- نقل میکنیم تا نقطه
B بدست آید در اینصورت خط MB خط مطلوب میباشد چه بر نقطهٔ M مرور
نموده و بعلاوه ضریب زاویهٔ آن مساوی ۲- میباشد

۱۷ ــ صورت کلّی خطوط مار بر نقطه $M(x', y')$ ــ وا ضحست
که بر یک نقطه بینهایت خط مستقیم با امتدادهای مختلف مرور مینماید حال برای
بدست آوردن صورت کلّی معادلهٔ خطوط فوق فرض میکنیم معادلهٔ خط بصورت
$y = mx + n$ (۱) باشد و چون این خط بر نقطه مفروض M مرور مینماید
بنابراین لازم است $y' = mx' + n$ (۲) باشد
حال چون در معادله (۱) و (۲) مقدار معلوم n را حذف میکنیم حاصل میشود
$y - y' = m(x - x')$ که در آن با تغییر ضریب زاویه m خطوط
مختلفه مار بر نقطه M بدست میآید

مثال ۱ ــ مطلوبست صورت کلّی خطوط مار بر نقطه $M(2, -3)$
بر وفق دستور فوق صورت کلّی خطوط مار بر نقطه M عبارتست از :

$$y + 3 = m(x - 2)$$

مثال ۲ — مطلوبست معادلهٔ خط مار بر نقطه $M\ (-1, 2)$ که با جهت مثبت محور $x'x$ زاویه ۴۵° تشکیل دهد

صورت کلی خطوط مار بر نقطه M عبارتست از $y - 2 = m(x + 1)$ که چون در آن بجای m مقدارش $tg\,45° = 1$ را قرار داده خلاصه کنیم حاصل میشود $y = x + 3$ که معادله خط مطلوب میباشد

۱۸ — از دستور $y - y' = m(x - x')$ چون m را استخراج کنیم حاصل میشود $m = \frac{y - y'}{x - x'}$ یعنی :

ضریب زاویه هر خط عبارتست از نسبت تفاضل عرض دو نقطه غیر مشخص آن بتفاضل طول آن دو نقطه

از روی دستور فوق همواره میتوان تحقیق نمود که آیا ۳ نقطه A و B و C بمختصات معلوم در روی یک خط مستقیم واقعند یا خیر باینطریق که ضریب زاویه خط AB را از روی مختصات A و B و ضریب زاویه خط BC را از روی مختصات B و C حساب میکنیم درصورتیکه مساوی شد ۳ نقطه بر یک استقامتند والا خیر

۱۹ — معادلهٔ خط مار بر دو نقطه $M(x', y')$ و $N(x'', y'')$ —

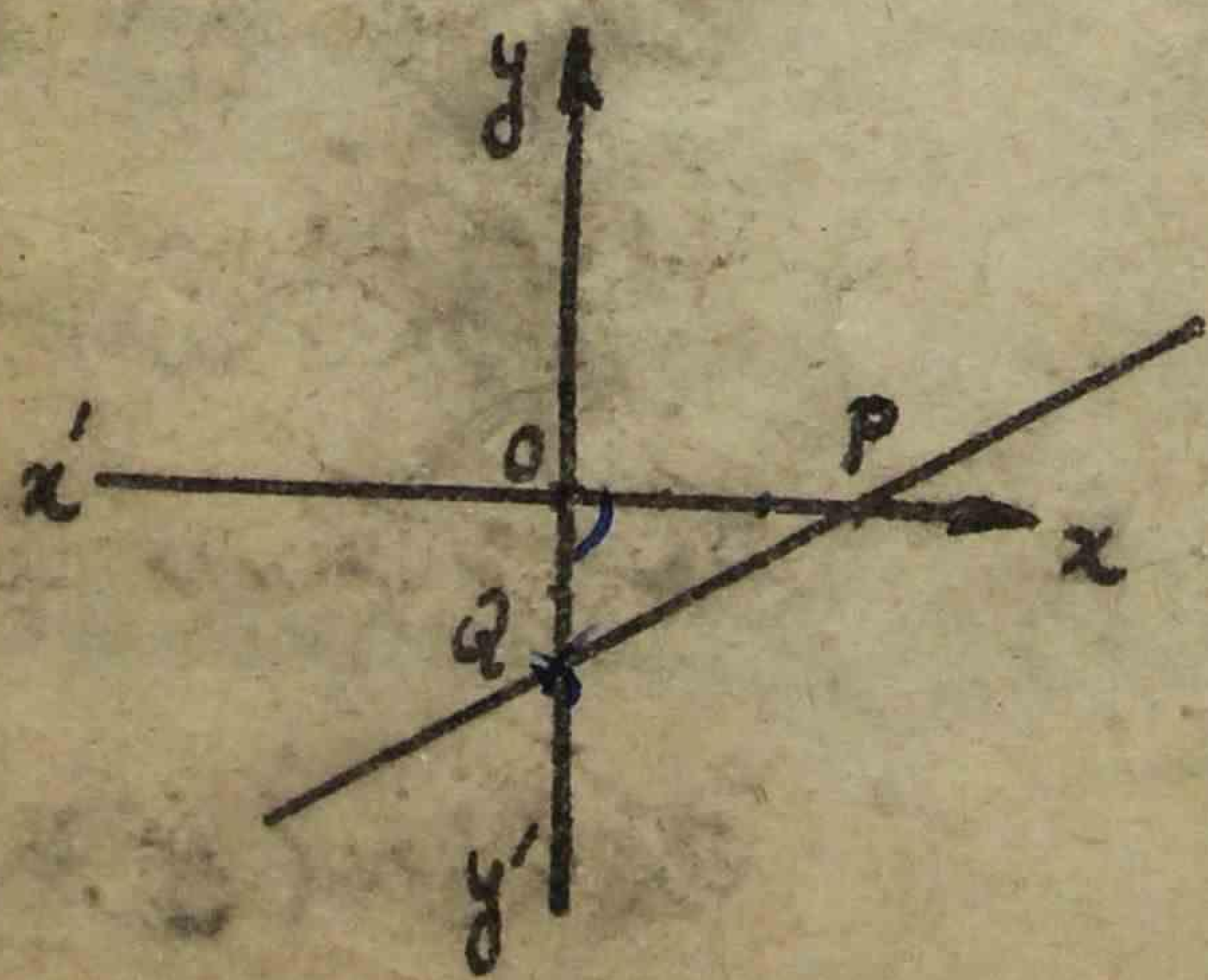
نقطه غیر مشخص $P(x,y)$ را در روی خط MN اختیار میکنیم در اینصورت
چون سه نقطه M و N و P بر یک استقامتند لذا ضریب زاویه MP
با ضریب زاویه MN مساوی خواهند بود بنابراین لازم است :

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y''-y'}{x''-x'} \quad \text{و یا} \quad y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$$

بطوریکه با بین مختصات نقطه غیر مشخص P از خط MN همواره رابطه فوق برقرار
است بنابراین این رابطه معادله خط MN خواهد بود
معادله فوق دارای ضریب زاویه ثابت $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ بوده و عرض از مبدأ
آن نیز ثابت و لذا خط منحصر بفرد میباشد

حالت مخصوص - بر وفق رابطه فوق هرگاه فرض کنیم طول و عرض
از مبدأ خطی بترتیب p و q معلوم باشد معادله خط بصورت ذیل خواهد بود

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$



از اینقرار برای رسم خطی که معادله آن
بصورت اخیر مثلاً بصورت $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$
باشد کافیست در روی محور $x'x$
طول $\overline{OP}$ را مساوی ۳ و در روی محور

y'y طول $OQ=-2$ را جدا نموده خط PQ را وصل نمائیم

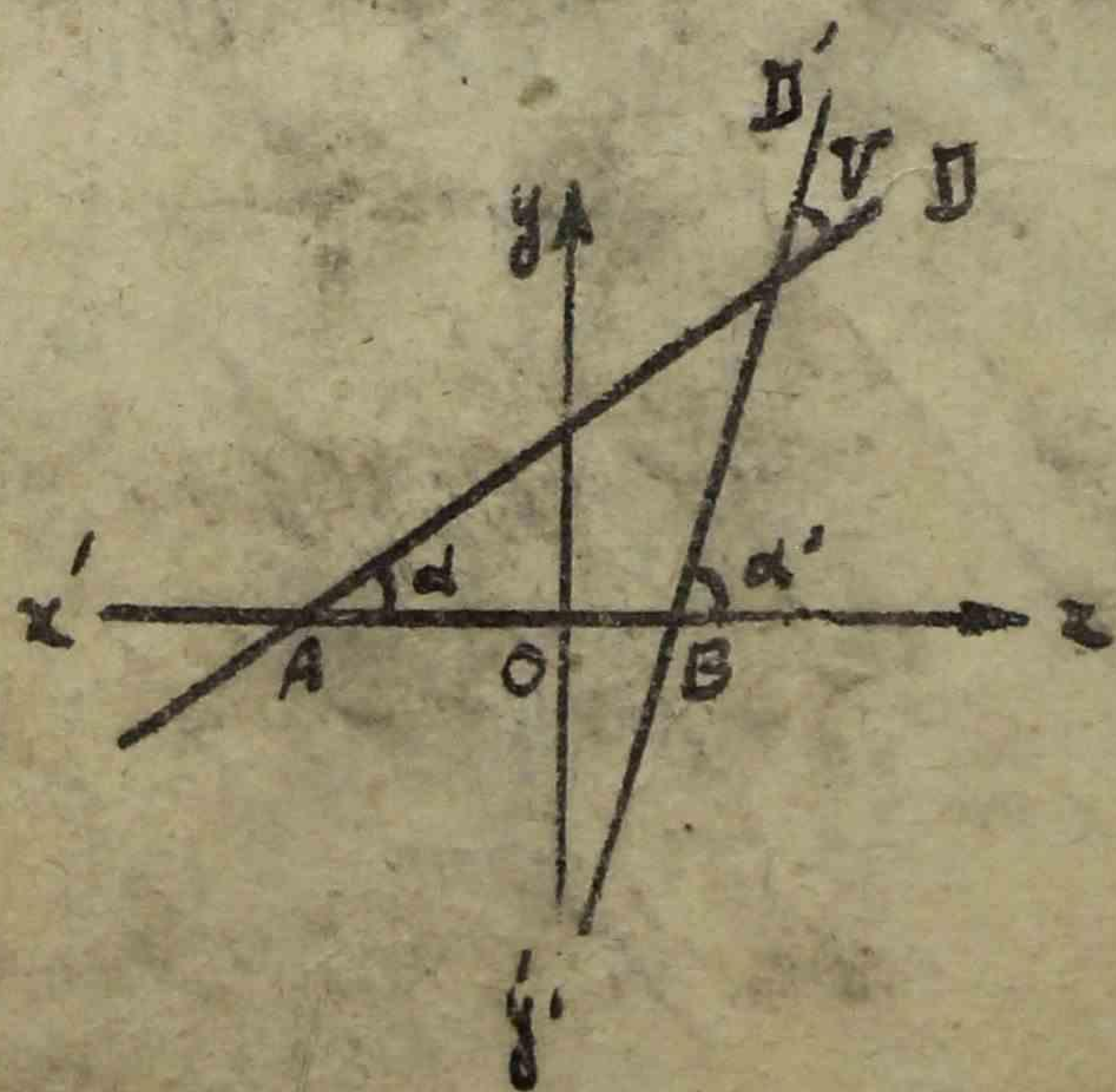
مثال ۱ – مطلوبست معادلهٔ خط مار بر دو نقطه $A(2,-3)$ و $B(0,1)$

چون در دستور سابق بجای x' و y' و x'' و y'' مقادیر عددی آنها را قرار دهیم حاصل میشود $y+3=\frac{1+3}{0-2}(x-2)$ که پس از اختصار بصورت ذیل در میآید $y=-2x+1$

مثال ۲ – مطلوبست معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن ۱- و عرض از مبدأ آن ۳ باشد

بر وفق دستور $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ معادله خط مطلوب بصورت $-x+\frac{y}{3}=1$ ویا $3x-y+3=0$ میباشد

۲۰ – **زاویه دو خط** – دو خط D و D' را که ضریب زاویهٔ اولی m وضریب زاویهٔ دومی m' میباشد اختیار نموده وفرض میکنیم اولی محور x'x را در نقطه A و دومی در نقطه B قطع نموده باشد هرگاه $\widehat{DAx}=\alpha$ و $\widehat{D'Bx}=\alpha'$





وزاویهٔ $V = (\widehat{D', D})$ باشد حاصل میشود $V = \alpha' - \alpha$ وبنابراین

$tg\,V = tg(\alpha' - \alpha)$ که پس از بسط طرف دوم حاصل میشود

$$tg\,V = \frac{tg\,\alpha' - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha'\,tg\,\alpha}$$

وچون $tg\,\alpha = m$ و $tg\,\alpha' = m'$ میباشد لذا نتیجه میشود $tg\,V = \frac{m' - m}{1 + m'm}$

از رابطه فوق بفرض معلوم بودن m و m' $tg\,V$ وبنابراین V بدست میآید.

تبصره ــ چنانکه ملاحظه میشود با تبدیل m به m' کسر فوق تغییر علامت میدهد

دراینحالت زاویه مکمل V که زاویه دیگر دوخط است بدست میآید.

مثال ــ مطلوبست محاسبهٔ زاویهٔ دوخط $4x - 2y - 1 = 0$ و $9x + 3y + 5 = 0$

چون هر یک از دو معادله رانسبت به y حل کنیم حاصل میشود :

$$y = 2x - \frac{1}{2} \qquad \text{و} \qquad y = -3x + \frac{5}{3}$$

حال چون در دستور فوق بجای m و m' مقادیر آنها ۲ و ۳- را قرار دهیم

حاصل میشود $tg\,V = 1$ وازآنجا $V = 45^\circ$

۲۱ ــ شرط لازم وکافی برای آنکه دوخط موازی یا بریکدیگر

عمود باشند ــ از دستور $tg\,V = \frac{m' - m}{1 + m'm}$

نتایج ذیل حاصل میشود

۱ـ شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط موازی باشند آنست که ضریب زاویهٔ آنها مساوی باشد چه اولاً هرگاه دو خط موازی فرض کنیم $V=0$ و بنابراین $\operatorname{tg} V=0$ ولذا $m'=m$ میگردد ثانیاً هرگاه فرض کنیم $m'=m$ باشد $\operatorname{tg} V=0$ ولذا $V=0$ و دو خط موازی میگردند

۲ـ شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط بر یکدیگر عمود باشند آنست که حاصل ضرب ضریب زاویهٔ آنها مساوی ۱ـ باشد چه اولاً هرگاه دو خط بر یکدیگر عمود باشند $V=\frac{\pi}{2}$ و بنابراین $\operatorname{tg} V=\infty$ ولذا $m'm=-1$ میگردد ثانیاً هرگاه فرض کنیم $m'm=-1$ باشد $\operatorname{tg} V=\infty$ ولذا $V=\frac{\pi}{2}$ و دو خط بر یکدیگر عمود میگردد

مسئله ۱ـ مطلوبست معادلهٔ خطی که از نقطه $M(-2,1)$ موازی خط $y=3x-2$ رسم شود

صورت کلی معادله خطوط مار بر نقطه M عبارتست از $y-1=m(x+2)$ و چون باید با خط مفروض موازی باشد بنابراین لازم است $m=3$ بوده و بنابراین معادلهٔ خط مطلوب عبارت میگردد از $y-1=3(x+2)$ و یا پس از اختصار

$$y=3x+7$$



مسئله ۲ - مطلوبست معادله خطی که از نقطه $M(4, -3)$ برخط $y = 5 - 2x$ عمود گردد

صورت کلی معادلهٔ خطوط مار بر نقطه M عبارتست از $y + 3 = m(x - 4)$

وچون باید خط برخط مفروض عمود باشد لذا ضریب زاویه آن $m = \frac{1}{2}$

بوده وبنابراین معادلهٔ خط مطلوب عبارت میگردد از $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 4)$

ویا پس از اختصار $y = \frac{1}{2}x - 5$

۲۲ - فصل مشترک خطوط - تعبیر جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی ویا جواب یک معادله یک مجهولی -

بطوریکه میدانیم حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{vmatrix} f(x, y) = 0 \\ f_1(x, y) = 0 \end{vmatrix}$$

عبارتست از تعیین دستگاههای جواب x و y که در دو معادلهٔ مفروض صدق نمایند ولی چون هریک از معادلات فوق را همواره میتوان بیک خط مستقیم یا منحنی نمایش داد بنابراین جواب دستگاه مفروض عبارت میگردد از مختصات نقطه تقاطع دو خطی که نمایش هندسی معادلات فوق میباشند بطوریکه همیشه بعدهٔ نقاط تقاطع این دو خط دستگاه مفروض دارای جواب میباشد

مثال ۱ - مطلوبست بحث در عده جوابهای دستگاه دو معادله دو مجهولی درجهٔ اول

$$\begin{vmatrix} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{vmatrix}$$

چون هر یک از دو معادله را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود :

$$\begin{vmatrix} y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \\ y = \frac{-a'}{b'}x - \frac{c'}{b'} \end{vmatrix}$$

که نمایش هندسی هر یک از آنها خطی است مستقیم حال برحسب مقادیر ضرائب آنها چند حالت میتوان تشخیص داد :

حالت اول - در حالتی که $\frac{-a}{b} = \frac{-a'}{b'}$ و یا $ab' - ba' = 0$ باشد دو خط دارای ضریب زاویهٔ مساوی بوده و بنابراین موازی یا منطبقند حال اگر عرض از مبدأ آنها نیز مساوی یعنی $\frac{-c}{b} = \frac{-c'}{b'}$ و یا $bc' - cb' = 0$ باشد دو خط منطبق و بنابراین دو معادله مفروض متوافق بوده و عدهٔ جوابهای دستگاه فوق بینهایت میباشد و اگر $bc' - cb' \neq 0$ باشد دو خط موازی بوده و دستگاه مفروض جواب ندارد

حالت دوم - در حالتی که $\frac{-a}{b} \neq \frac{-a'}{b'}$ یا $ab' - ba' \neq 0$

باشد دو خط دارای ضریب زاویه مختلف بوده و لذا متقاطعند و چون بیش از یک نقطه تقاطع نمیتوانند دارا باشند لذا دستگاه مفروض در اینحالت فقط دارای یک جواب خواهد بود

مثال ۲ - دایرهٔ $x^2 + y^2 = \frac{36}{5}$ و نقطه A در روی محور $x'x$ بطول ۳+ مفروض است مطلوبست معادلهٔ خط مماس از نقطه A بر دایره

صورت کلی خطوط مار بر نقطه A عبارتست از $y = m(x-3)$

وچون باید این خط با دایره مماس باشد لذا دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{36}{5} \\ y = m(x-3) \end{array} \right|$$

باید دارای ریشه مضاعف باشد حال اگر y را در دو معادلهٔ فوق حذف نموده معادله حاصل را برحسب x مرتب کنیم حاصل میشود :

$$5(1+m^2)x^2 - 30m^2x + 45m^2 - 36 = 0$$

که چون در آن Δ را مساوی صفر قرار دهیم حاصل میشود $45(4-m^2) = 0$

و از آنجا $m = \pm 2$

بنابراین از نقطه مفروض A میتوان دو مماس بر دایرهٔ فوق رسم نمود که معادلات

آنها عبارتست از $y = 2x - 6$ و $y = -2x + 6$

همچنین اگر معادلهٔ یک مجهولی $f(x) = 0$ را اختیار نموده و فرض کنیم $y = f(x)$ باشد چون منحنی نمایش آنرا رسم کنیم طول نقاط تقاطع این منحنی با محور $x'x$ نظیر جوابهای معادلهٔ $f(x) = 0$ میباشد زیرا بازاء طول این نقاط $y = 0$ میباشد بطوریکه بعدهٔ نقاط تقاطع منحنی $y = f(x)$ با محور $x'x$ معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای جواب میباشد

باینطریق نیز راهی برای حل وبحث بعضی معادلات بدست میآید که بعدها در ضمن حل بعضی مسائل مورد استعمال آنرا خواهیم دید

$MH = \frac{ax' + by' + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مسائل

۱۱- مطلوبست رسم خطوط $y = m(x - 1) + 1$ بازاء مقادیر ذیل $m = 0$ و $m = 1$ و $m = -3$

۱۲- مختصات رؤس مثلثی عبارتست از $A(2, 1)$ و $B(4, -3)$ و $C(-1, -2)$ مطلوبست اوّلاً رسم مثلث ثانیاً معادلهٔ اضلاع ثالثاً مختصات جدید رؤس و معادلات جدید اضلاع مثلث هرگاه دو محور را بموازات خود حرکت دهیم تا مبدأ مختصات بر وسط AB واقع گردد

۱۳- نقطه $M(2, -3)$ و خط $3x - 2y = 4$ مفروضند مطلوبست اوّلاً معادلهٔ خطی که از نقطه M موازی خط فوق رسم شود ثانیاً معادلهٔ خطی که از نقطه M عمود

برخط فوق رسم شود ثالثاً معادلهٔ خطی که از نقطه M مرور نموده و با خط فوق زاویهٔ ۴۵ تشکیل دهد

۱۴- مطلوبست فاصلهٔ مبدأ O از خط $2x + y = 4$

۱۵- مطلوبست محاسبهٔ مقدار a برای آنکه دو خط

$x - 2ay = 1$ و $ax - 2y = 3$ موازی باشند

۱۶- دو نقطه $A(2,-1)$ و $B(3,0)$ و $C(2a, a-1)$ مفروضند

مقدار a را بطریقی تعیین کنید که سه نقطه فوق بر یک استقامت واقع گردند

۱۷- سه خط :

$y = 5x + 8 \qquad 2y = 3x + m \qquad 3y = 4x + m$

مفروضند مقدار m را حساب کنید بطریقی که سه خط بر یک نقطه تقاطع نمایند

۱۸- مطلوبست محاسبهٔ مقدار a بطریقی که دو خط

$$ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$$

$$3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$$

اولاً موازی ثانیاً عمود ثالثاً متقاطع باشند

۱۹- مطلوبست شرائط لازم و کافی برای آنکه خطوط :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$\frac{x}{p'} + \frac{y}{q'} = 1$$

$$\frac{x}{p+p'} + \frac{y}{q+q'} = 1$$

اولاً موازی ثانیاً متقاطع باشند



۲۰- ثابت کنید که سه میانه هر مثلث و همچنین سه ارتفاع آن بر یک نقطه تقاطع میکنند

۲۱- ثابت کنید که مجموع عمودهای وارد از یک نقطه M واقعه در داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC بر اضلاع همین مثلث مقداریست ثابت

۲۲- معادلات اضلاع مثلثی عبارتست از

$$BC \qquad 4x + 3y - 10 = 0$$

$$CA \qquad 3x + 5y - 2 = 0$$

$$AB \qquad x - 2y + 3 = 0$$

اولاً مطلوبست محاسبه مختصات رئوس مثلث ثانیاً پس از محاسبه مختصات رئوس معادلات اضلاع را از روی آنها بدست آورید ثالثاً مختصات نقطه تقاطع سه میانه را حساب کنید رابعاً دو خط موازی AB و AC مرسوم از B و C در نقطه A' و دو خط موازی BC و BA مرسوم از A و C در نقطه B' و دو خط موازی CA و CB مرسوم از A و B در نقطه C' یکدیگر را قطع میکنند تحقیق کنید که A وسط B'C' میباشد همچنین اگر بهمین طریق مثلث A''B''C'' را برای مثلث A'B'C' تشکیل دهیم تحقیق کنید که نقطه A وسط A'A'' میباشد خامساً مطلوبست محاسبه طول اضلاع مثلث

۲۳- ثابت کنید که هر یک از خطوط ذیل بازاء جمیع مقادیر m بر یک نقطه ثابت مرور مینمایند که مختصات آنرا حساب می کنید :

$$mx + 3y - 4m + 1 = 0$$

$$(m+3)x + (5-m)y + 1 = 0$$

$$x(2m^3+m^2-m+2)+y(-3m^3+m^2+m-1)-5m^2+m-4=0$$

۲۴ - ثابت کنید که منحنیات ذیل بازاء جمیع مقادیر a بر نقطه ثابتی مرور مینمایند که مختصات آنرا حساب میکنید

$$y=2x^2-(a+1)x-a$$

$$y=\frac{ax+5}{x-2}$$

۲۵ - ثابت کنید که منحنیات ذیل بازاء جمیع مقادیر پارامتر a همواره بر دو نقطه ثابت مرور مینمایند که مختصات آنها را حساب می کنید

$$y=2ax^2-x-2a-1$$

$$y=\frac{x+4a}{ax+1}$$

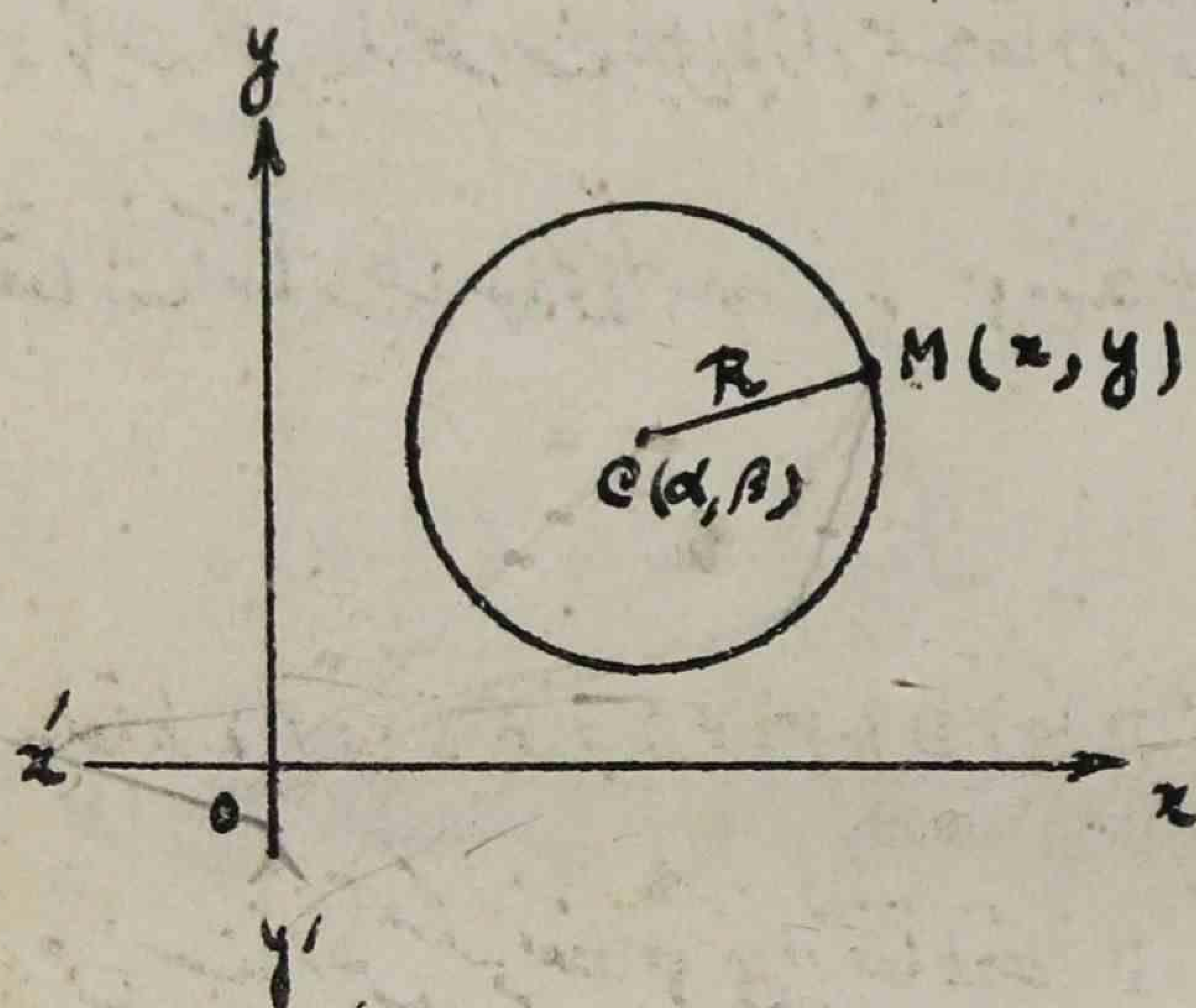
۲۶ - نقاط A (۱ و ۲) و B (۴ و ۳-) و خط D بمعادله $2y-3x=0$ مفروض است فرض میکنیم نقطه P یکی از نقاط خط D باشد خط PA محور $x'x$ را در نقطه M و خط PB محور $y'y$ را در نقطه N قطع میکند اولاً ثابت کنید که خط MN هرگاه نقطه P خط D را طی کند بر نقطه ثابتی مانند N مرور مینماید ثانیاً تحقیق کنید که نقاط A و B و N بر یک استقامت میباشند

۲۷ - در روی محور $x'x$ نقاط A و A' بطول a و a' و در روی محور $y'y$ دو نقطه B و B' بعرض b و b' مفروضند خطوط AB و $A'B'$ یکدیگر را عموماً در نقطه مانند C قطع میکنند مطلوبست اولاً محاسبه مختصات C ثانیاً تحقیق کنید که اوساط قطعات AB و $A'B'$ و OC بر یک استقامت واقع میباشند

معادله بعضی منحنیات*

۲۳ – معادلهٔ دایره – تعریف – دایره مکان نقاطی است در صفحه که از نقطهٔ ثابتی موسوم بمرکز بفاصلهٔ ثابت باشند که آنرا شعاع دایره مینامند

حال برای یافتن معادله دایره دو محور قائم $x'ox$ و $y'oy$ را اختیار نموده فرض میکنیم نقطه $c(\alpha,\beta)$ مرکز دایرهٔ بشعاع R باشد و چون نقطه غیر مشخص $M(x,y)$ را در روی دایره فوق فرض نمودهٔ فاصلهٔ CM را از روی مختصات نقاط c و M حساب کنیم حاصل میشود:



$$\overline{CM}^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \quad (1)$$

و یا
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

---

* چون در حل بعضی مسائل این کتاب دانستن معادله بعضی منحنیات از قبیل دایره و بیضی وغیره لازم میباشد لذا طریقه یافتن معادلهٔ منحنیات مزبور را بیان مینمائیم ولی تدریس آنها اختیاریست

که معادله دایره ایست بشعاع R هرگاه مختصات مرکز آن a و b باشد

در حالتیکه مرکز مختصات را مرکز دایره فرض کنیم معادله دایره بصورت $x^2+y^2=R^2$

در میآید بطوریکه ملاحظه میشود معادله دایره معادله دو مجهولی درجه دوّمی است که

در آن ضریب x^2 و y^2 مساوی و ضریب xy مساوی صفر میباشد

بالعکس هر معادله درجه دوم $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

را میتوان بصورت معادله (۱) تبدیل نموده و بنابراین معادله دایره دانست مشروط

بر آنکه $a^2+b^2-c>0$ باشد

زیرا میتوان نوشت : $x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$

$y^2+2by=(y+b)^2-b^2$

که چون آنها را جمع نموده و بر طرفین c را اضافه کنیم حاصل میشود :

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=(x+a)^2+(y+b)^2-(a^2+b^2-c)=0$$

و یا

$$(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2-c$$

که معادله دایره ایست بشعاع $\sqrt{a^2+b^2-c}$ که مختصات مرکز آن

$(-a,-b)$ باشد

واضح است شرط وجود دایره فوق آنست که a^2+b^2-c مثبت و قابل جذر باشد

مثلاً معادله $x^2+y^2+6x-4y-12=0$ پس از تبدیل بصورت

$(x+3)^2+(y-2)^2=25$ درمیآید که معادله دایره ایست بشعاع ۵ که

مختصات مرکز آن (۲ و ۳-) میباشد

۲۴ - **معادلهٔ بیضی** - **تعریف** - بیضی مکان نقاطی است از

صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت موسوم بکانون مقدار ثابتی باشد

فاصلهٔ دو کانون را معمولاً به $2c$ و مقدار ثابت فوق را به $2a$ نمایش میدهند

خط واصل ما بین هر نقطه بیضی را بکانون شعاع حامل مینامند

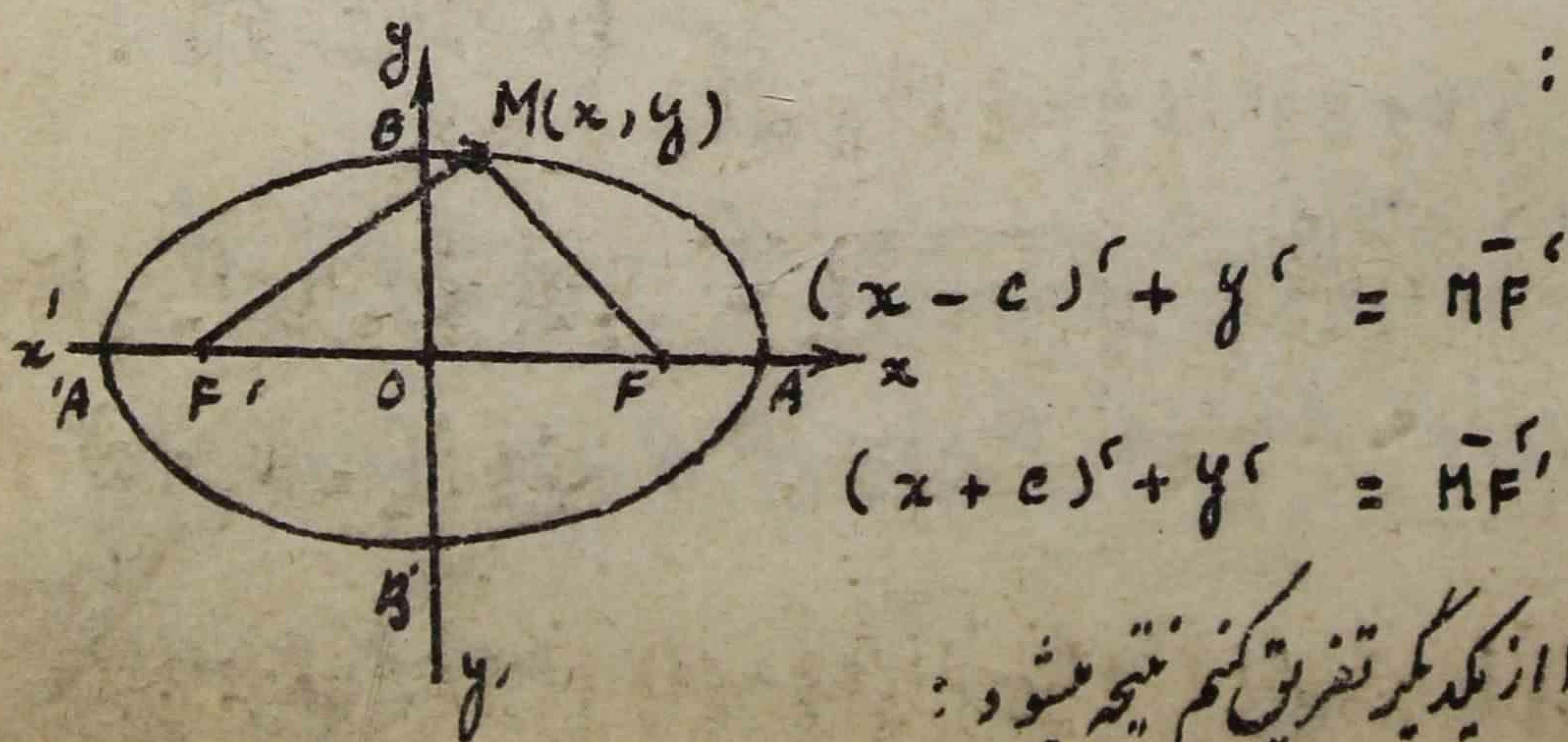
حال برای یافتن معادله بیضی فرض میکنیم FF' خط واصل بین دو کانون محور

x ها و عمود منصف آن محور y ها باشد و در اینصورت چون نقطه $M(x,y)$

را در روی بیضی فوق اختیار کنیم بنا بتعریف $MF+MF'=2a$

میباشد حال MF و MF' را از روی مختصات M و F و F' حساب میکنیم

تا حاصل شود :



$$(x-c)^2+y^2=\overline{MF}^2$$

$$(x+c)^2+y^2=\overline{MF'}^2$$

که چون آنها را از یکدیگر تفریق کنیم نتیجه میشود :

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 4cx$$

و یا

$$(MF' + MF)(MF' - MF) = 4cx$$

و چون $MF' + MF = 2a$ میباشد لذا حاصل میشود ،

$MF' - MF = \frac{2cx}{a}$ که با ملاحظهٔ رابطهٔ قبل MF و MF' بدست میاید

از ینقرار :

$$MF' = a + \frac{cx}{a} \qquad MF = a - \frac{cx}{a}$$

و چون در رابطه $\overline{MF}^2 = (x-c)^2 + y^2$ بجای MF مقدار آنرا قرار دهیم

حاصل میشود

$$\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

و یا پس از اختصار

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 - (a^2 - c^2)a^2 = 0$$

و چون فرض کنیم $a^2 - c^2 = b^2$ باشد نتیجه میشود

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

و یا

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

که عبارتست از معادلهٔ بیضی

محورهای بیضی — محور $x'x$ بیضی را در نقاط A و A' و محور $y'y$ بیضی را در نقاط B و B' قطع مینماید خط AA' را محور اطول و BB' را محور اقصر بیضی مینامند



بسهولت میتوان ملاحظه نمود که $AA' = 2a$ و $BB' = 2b$ میباشد

بطوریکه هرگاه محور اطول بیضی $AA' = 12$ و محور اقصر آن $BB' = 8$ باشد معادله

بیضی نسبت بدو محور آن عبارت میگردد از $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

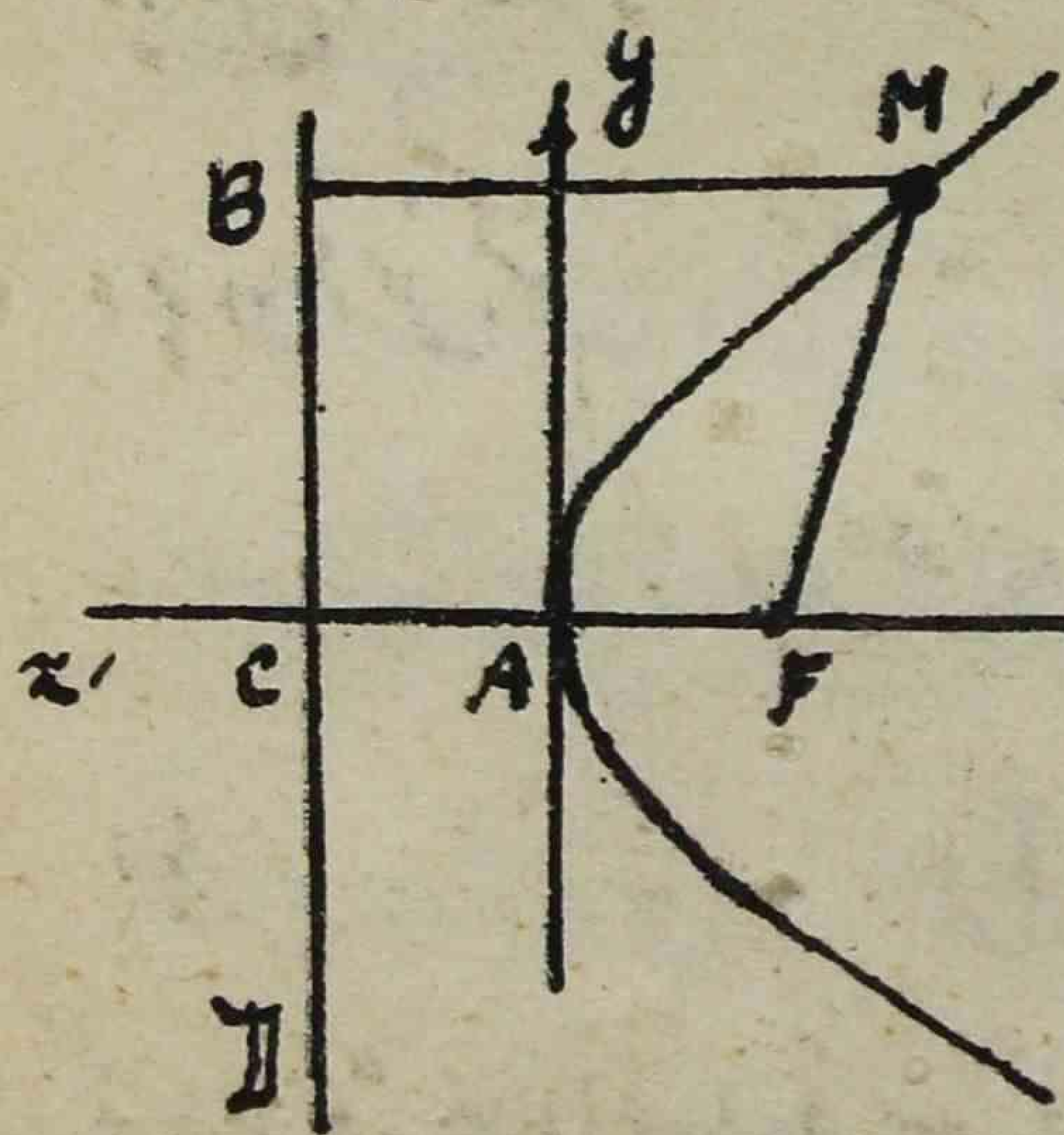
بطور کلی هرگاه فرض کنیم مختصات مرکز بیضی نسبت بدو محور مختصات (α, β)

باشد معادله بیضی بصورت ذیل درمیآید $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

۲۵ - **معادله سهمی** - **تعریف** - سهمی مکان نقاطی است از صفحه

که فاصلهٔ آنها از یک نقطه ثابت موسوم بکانون و یک خط ثابت موسوم بخط

هادی مساوی باشد



فاصلهٔ کانون F را از خط هادی D

پارامتر سهمی نامیده آن را به p

نمایش میدهند

حال برای بدست آوردن معادلهٔ

سهمی عمود FC وارد از کانون F بر خط هادی D را محور x ها و عمود منصف

آنرا محور y ها قرار داده نقطه $M(x, y)$ را در روی سهمی فرض میکنیم و بنا بتعریف

سهمی $MF = MB$ و یا $MF^2 = MB^2$ خواهد بود و چون

$\overline{MF}^2$ و $\overline{MB}^2$ را حساب کنیم حاصل میشود :

$$\overline{MF}^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2$$

$$\overline{MB}^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

و بنابراین $(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$

و از آنجا $y^2 = 2px$

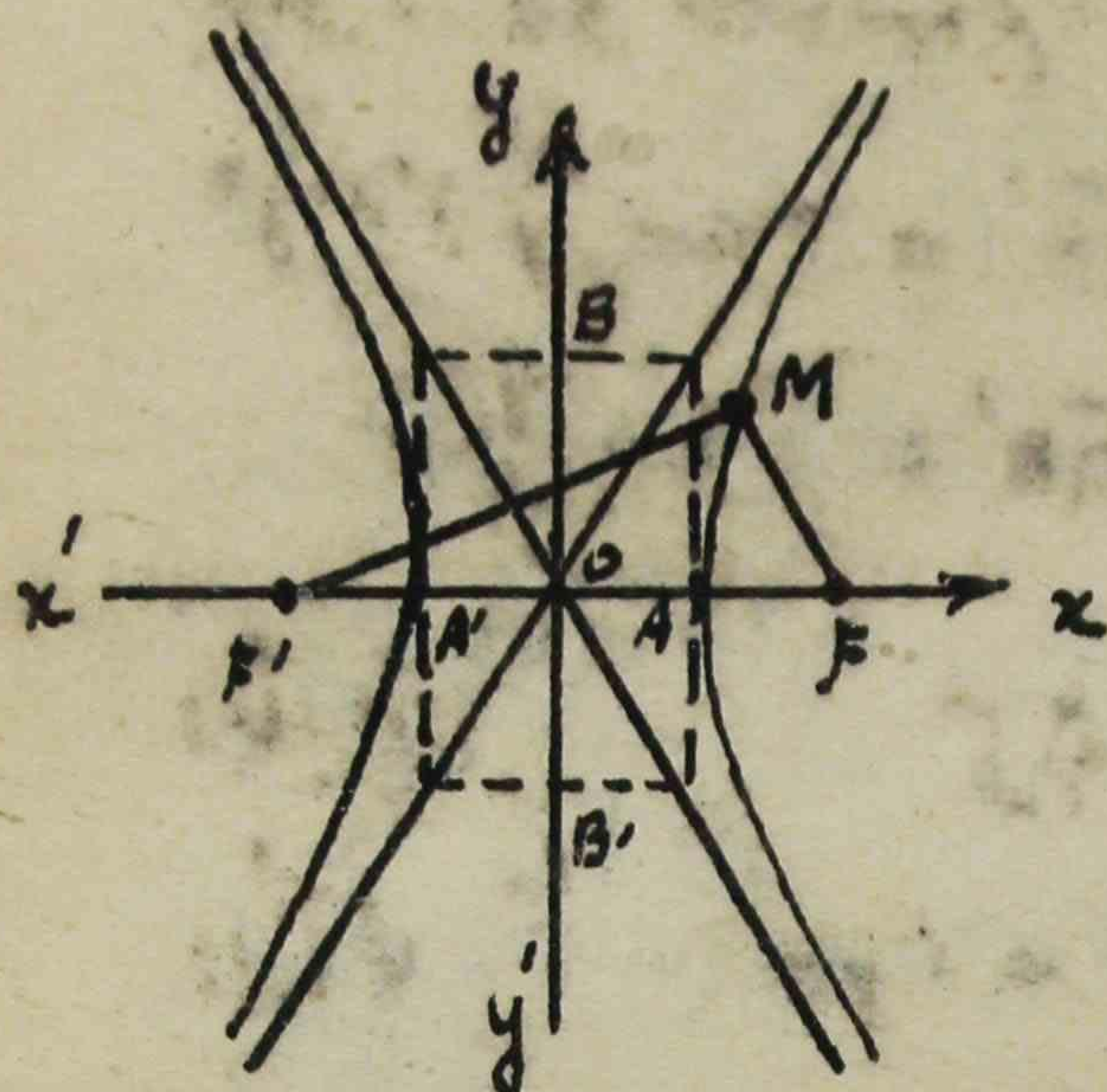
که معادلهٔ سهمی فوق میباشد

محور و راس سهمی — محور $x'x$ را محور سهمی و نقطه A را راس سهمی مینامند

۲۶ — **معادلهٔ هذلولی** — **تعریف** — هذلولی مکان نقاطی است از صفحه که تفاضل فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت موسوم بکانون مقدار ثابتی باشد

فاصلهٔ دو کانون را معمولاً به $2c$ و مقدار ثابت فوق را به $2a$ نمایش میدهند و خط واصل مابین هریک از نقاط هذلولی بکانون را شعاع حامل مینامند

حال برای بدست آوردن معادله هذلولی فرض می کنیم FF' خط واصل مابین دو کانون محور x ها و عمود منصف آن محور y ها باشد و چون نقطهٔ $M(x, y)$ را در روی آن اختیار کنیم بنا بفرض $MF' - MF = 2a$



ولی $\overline{MF'}^2 = (x+c)^2 + y^2$

و $\overline{MF}^2 = (x-c)^2 + y^2$

وبنابراین

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 =$$

$$(MF' - MF)(MF' + MF) =$$

$$4cx$$

میباشد که بالاحظه $MF' - MF = 2a$ حاصل میشود $MF' + MF = \frac{2cx}{a}$

از دو رابطه اخیر حاصل میشود :

$$MF = \frac{cx}{a} - a \qquad MF' = \frac{cx}{a} + a$$

که چون در رابطه $\overline{MF}^2 = (x-c)^2 + y^2$ بجای MF مقدار آنرا قرار دهیم حاصل میشود

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

یا پس از اختصار $a^2y^2 - x^2(c^2-a^2) + a^2(c^2-a^2) = 0$

وچون فرض کنیم $c^2 - a^2 = b^2$ باشد حاصل میشود

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$



و یا $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

که معادلهٔ هذلولی نسبت بدو محور $x'x$ و $y'y$ میباشد

محورهای هذلولی — امتداد خط $F'F$ که در اینجا محور $x'x$ میباشد

و همچنین عمود منصف آن که در اینجا محور $y'y$ قرار داده شده است بمحورهای

هذلولی موسوم میباشد

خطوط مجانب هذلولی — چون در معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

مقدار y را مساوی صفر قرار دهیم حاصل میشود $x = \pm a$ که عبارتست

از طول نقاط A و A' محل تقاطع منحنی با محور $x'x$ در اینصورت طول قطعه خط

$AA' = 2a$ میباشد

همچنین اگر در روی محور $y'y$ از نقطه O و در طرفین آن قطعه $OB = OB' = \sqrt{c^2 - a^2}$

را جدا کنیم قطعه خط $BB' = 2b$ خواهد بود

هرگاه در روی AA' و BB' مربع مستطیلی بنا نموده اقطار آن را رسم کنیم

دو خط بدست میآید که آنها را خطوط مجانب هذلولی مینامند

و اختصاص این خطوط آنست که فاصلهٔ نقاط منحنی ازین خطوط میل میکند بسمت صفر

هرگاه نقاط در روی منحنی بینهایت دور شوند

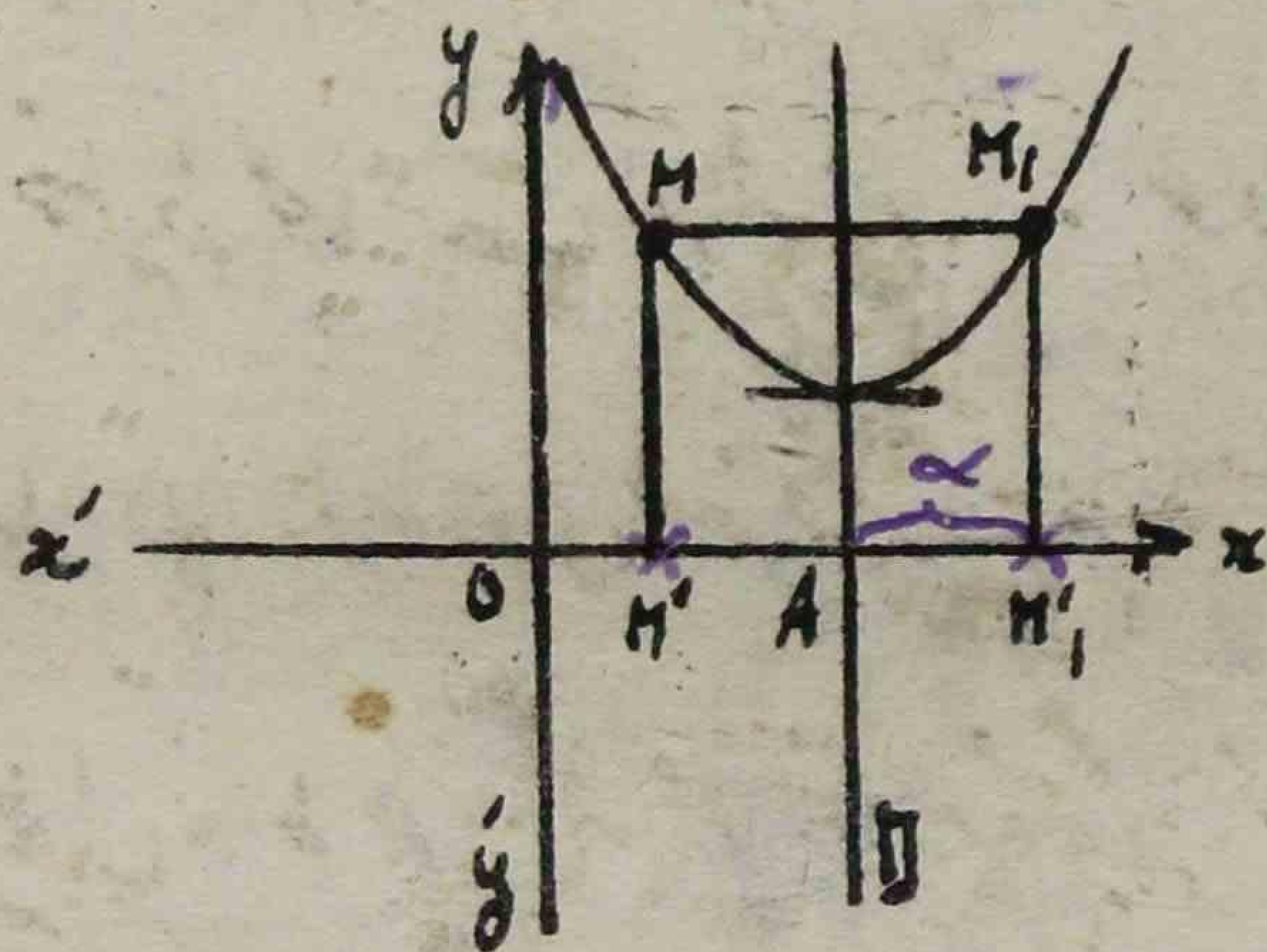
تقارن منحنیات نسبت بیک محور یا یک نقطه

۲۷ — **قضیّه ۱** — منحنی c که معادله آن بصورت کلی $f(x, y)=0$

فرض میشود نسبت بخط $x=a$ قرینه است هرگاه به x دو مقدار قرینه نسبت به

a بدهیم برای y یک مقدار بدست آید

اولاً فرض میکنیم منحنی c نسبت بخط D بمعادلهٔ $x=a$ قرینه باشد حال



اگر دو نقطه قرینه M و M_1

را در روی منحنی فرض کنیم MM_1

موازی محور $x'x$ ولذا

$\overline{M'M}=\overline{M'_1M_1}$ میگردد

واز طرفی نقطه A وسط $M'M'_1$ واقع شده بطوریکه اگر فرض کنیم $AM'_1=\alpha$

باشد $\overline{OM'_1}=a+\alpha$ و $\overline{OM'}=a-\alpha$ خواهد بود وبنابراین

مقادیر y نظیر دو مقدار قرینه نسبت به a متساوی میگردد

ثانیاً فرض میکنیم $\overline{OM'}=a-\alpha$ و $\overline{OM'_1}=a+\alpha$ و $\overline{M'M}=\overline{M'_1M_1}$ باشد

درا ینصورت MM_1 موازی محور $x'x$ وچون نقطه A وسط $M'M'_1$ میباشد

لذا خط D عمود منصف MM_1 بوده و نقاط M و M_1 نسبت بخط D قرینه میگردند

حالت مخصوص - تقارن منحنی نسبت بمحور y ها - هرگاه فرض کنیم $c=0$ باشد خط D با محور y ها مشتبه میگردد و بنابراین بیان حکم فوق چنین میشود :

منحنی C بمعادله کلی $f(x,y)=0$ نسبت بمحور y ها قرینه است هرگاه به x دو مقدار مساوی و مختلف العلامه بدهیم برای y یک مقدار بدست آید

مثال ۱ - منحنی $y=(x-2)^2$ سهمی است که نسبت بخط $x=2$ قرینه است چه اگر در معادلهٔ فوق فرض کنیم $x=2\pm\alpha$ باشد مقدار $y=\alpha^2$ خواهد بود

مثال ۲ - منحنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ و $x^2=2py$ که اولی معادله بیضی و دومی معادله هذلولی و سومی معادلهٔ سهمی است نسبت بمحور y ها قرینه میباشند چه اگر در آنها به x دو مقدار مساوی و مختلف العلامه بدهیم یک مقدار برای y بدست میآید بعبارهٔ اخری هرگاه در معادلات فوق x را به $-x$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمیکند

تبصره — بطور کلی باید در نظر داشت که کلیه معادلاتی که قوای x آنها از مرتبه زوج میباشد دارای خاصیت فوق بوده و بنابراین منحنی آنها نسبت بمحور $y'y$ قرینه میباشد

۲۸ — **قضیه ۲** — منحنی c که معادله کلی آن $f(x,y)=0$ میباشد نسبت بخط $y=b$ قرینه است هرگاه به y دو مقدار قرینه نسبت به b بدهیم برای x یک مقدار بدست آید

حکم فوق نیز بطریقی مشابه با قضیه (۱) اثبات میشود

حالت مخصوص — تقارن منحنی نسبت بمحور $x'x$ —

هرگاه فرض کنیم $b=0$ باشد خط $y=b$ با محور $x'x$ مشتبه میگردد و بنابراین بیان حکم فوق چنین میشود :

منحنی c بمعادله کلی $f(x,y)=0$ نسبت بمحور $x'x$ قرینه است هرگاه به y دو مقدار مساوی و مختلف العلامه بدهیم برای x یک مقدار بدست آید

مثال ۱ — منحنی $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$ بطوریکه میدانیم معادله دایره ایست که مختصات مرکز آن (α,β) میباشد و چون معادله فوق را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود :

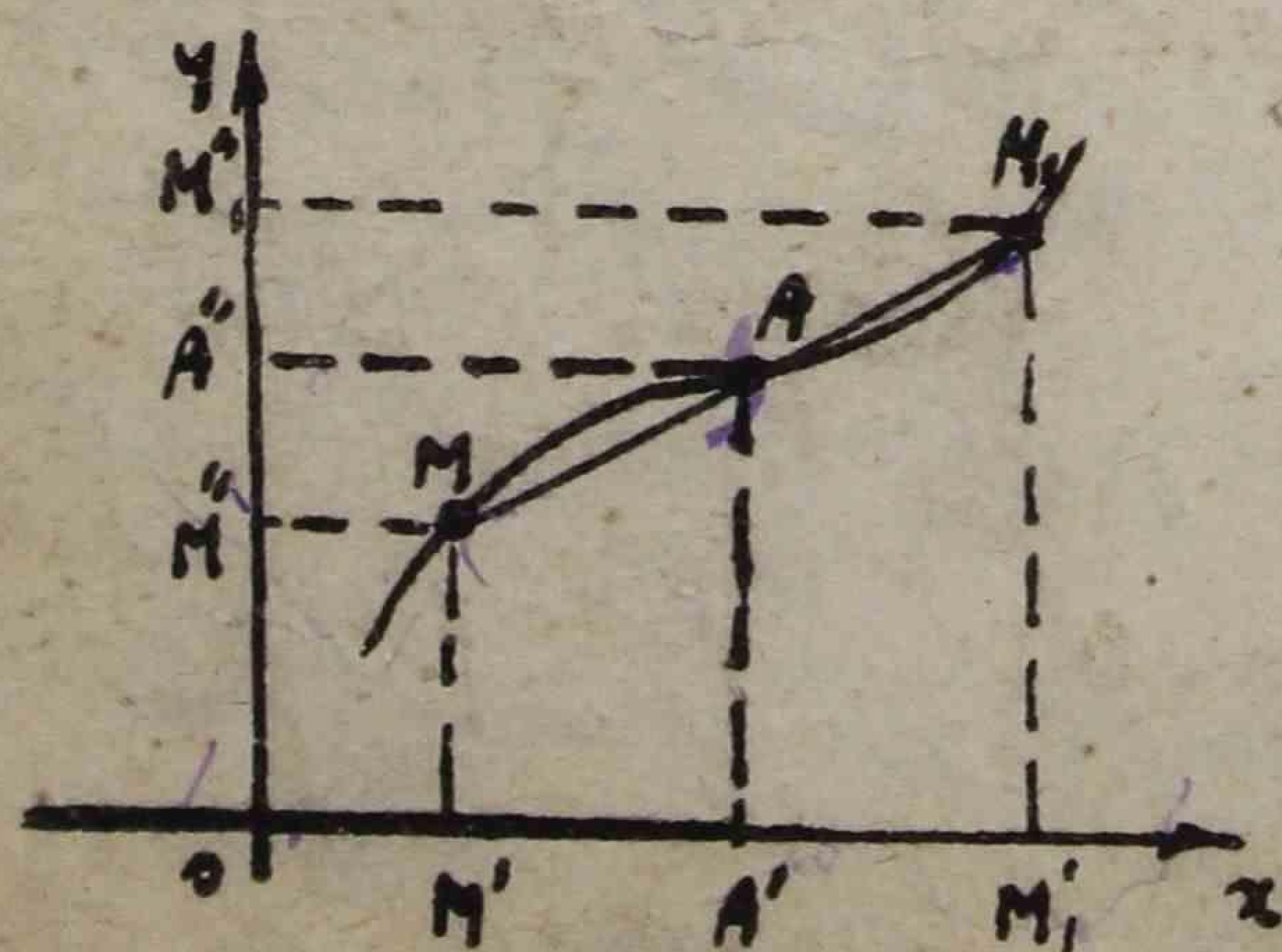
$$y=\beta\pm\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}$$

حال ملاحظه میکنیم که در عبارت فوق بازاء هر مقدار x دو مقدار قرینه نسبت به α برای y بدست میآید بطوریکه محور $y = \beta$ محور تقارن منحنی فوق میباشد

مثال ۲ - چون معادلهٔ $x^2+y^2=1$ را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ وچنانکه ملاحظه میشود بازاء هر مقدار x برای y دو مقدار مساوی و مختلف العلامه بدست میآید بطوریکه منحنی فوق نسبت بمحور $x'x$ قرینه است

تبصره - باید همواره در نظر داشت که کلیه معادلاتی که در آنها قوای y از درجهٔ زوج باشد دارای خاصیت فوق بوده و منحنی آنها نسبت بمحور $x'x$ قرینه میباشد

۲۹ - **قضیهٔ ۳** - منحنی c که معادله کلی آن $f(x,y)=0$ میباشد نسبت بنقطه $A(\alpha,\beta)$ قرینه است هرگاه بازاء دو مقدار x قرینه نسبت به



α برای y دو مقدار قرینه نسبت به β بدست آید

اولاً فرض میکنیم منحنی c نسبت نقطه A قرینه باشد



چون دو نقطه قرینه M و M_1 را در روی آن اختیار نموده نقاط فوق را بر دو محور تصویر کنیم بنابرآنکه A وسط MM_1 میباشد A' وسط $M'M'_1$ و A'' وسط $M''M''_1$ بوده بطوریکه اگر $M'A'=a$ و $M''A''=b$ باشد $OM'=\alpha-a$ و $OM'_1=\alpha+a$ و $OM''=\beta-b$ و $OM''_1=\beta+b$ خواهد بود

ثانیاً هرگاه فرض کنیم $OM'=\alpha-a$ و $OM'_1=\alpha+a$ و $OM''=\beta-b$ و $OM''_1=\beta+b$ باشد نقطه A' وسط $M'M'_1$ و نقطه A'' وسط $M''M''_1$ و بالنتیجه A وسط MM_1 واقع شده و نقاط M و M_1 نسبت بنقطه A قرینه میگردند

حالت مخصوص – تقارن منحنی نسبت بمبدأ – هرگاه $\alpha=\beta=0$ فرض شود نقطه A با مبدأ O مشتبه شده و بیان حکم فوق چنین میشود

منحنی C بمعادله کلی $f(x,y)=0$ نسبت بمبدأ O قرینه است هرگاه برای x دو مقدار مساوی و مختلف العلامه اختیار کنیم برای y نیز دو مقدار مساوی و مختلف العلامه بدست آید

مثال ۱ – در معادله $y-1=2(x-5)^3+(x-5)$

چون فرض کنیم $x=5\pm\alpha$ باشد حاصل میشود:







$$\begin{cases} x = ۵ + \alpha \\ y = ۱ + (۲\alpha^۳ + \alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = ۵ - \alpha \\ y_1 = ۱ - (۲\alpha^۳ + \alpha) \end{cases}$$

بطوریکه ملاحظه میشود مقادیر y نظیر نسبت به ۱ قرینه میباشند لذا منحنی فوق نسبت بنقطه (۱و۵) A قرینه میباشد

مثال ۲ - چون در معادله $y = x^۵ - ۲x^۳$ فرض کنیم $x = \pm\alpha$ باشد حاصل میشود :

$$\begin{cases} x = +\alpha \\ y = \alpha^۵ - ۲\alpha^۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ y_1 = -(\alpha^۵ - ۲\alpha^۳) \end{cases}$$

یعنی مقادیر y نظیر ساوی ومختلف العلامه اند لذا منحنی نسبت بمبدأ o قرینه میباشد

(مکان هندسی)

۳۰ - **معادلهٔ مکان** - معادلهٔ مکان هندسی نقاطی راکه دارای خاصیت هندسی مشترکی باشند همواره میتوان از روی خاصیت مزبور بدست آورد چنانکه معادله دایره وبیضی وسهمی وهذلولی رااز روی خواصشان بدست آوردیم گاهی مقصود تعیین معادلهٔ مکان نقاطی است که فصل مشترک دوخط باشند

که برحسب تغییر پارامتری وضعشان تغییر نماید دراینصورت هرگاه معادله دو خط

بصورت :

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

$$\varphi(x, y, \lambda) = 0$$

در دست باشد (λ نمایش پارامتر میباشد) برای تعیین مکان نقطه تقاطع این دو خط هرگاه λ تغییر نماید کافیست مابین دو معادله فوق λ را حذف کنیم چه دراینصورت رابطهٔ مابین x و y نقطه تقاطع بدست میآید که بستگی بمقدار λ ندارد

اینک برای تمرین چند مسئله حل میکنیم

مسئله ۱ – مختصات نقطهٔ عبارتست از

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \frac{1}{2} \sin t \end{cases}$$

(t نمایش پارامتریست که از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر میکند) مطلوبست مکان نقطه برای تعیین مکان نقطهٔ در دو معادلهٔ فوق پارامتر t را حذف میکنیم تا حاصل شود :

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \text{ویا} \quad (x-1)^2 + 4y^2 = 1$$

بنابراین مکان بیضی است که محور اطول آن ۲ و محور اقصر آن $\frac{1}{2}$ ومختصات مرکز آن $(1, 0)$ میباشد

مسئله ۲ – مطلوبست مکان نقاطی که تفاضل مربعین فواصل آنها از دو نقطه

ثابت A و B مقدار ثابت K باشد

دو نقطه A و B را بفاصله

ثابت $AB=2a$ اختیار نموده

AB را محور $x'x$ و عمود منصف

آنرا محور $y'y$ قرار میدهیم حال اگر

فرض کنیم نقطه $M(x,y)$ یکی از نقاط فوق باشد بنا بفرض :

$$MA^2 - MB^2 = K$$

میباشد چون MA^2 و MB^2 را از روی مختصات M و A و B

حساب کنیم حاصل میشود : $MA^2 = (x+a)^2 + y^2$

$MB^2 = (x-a)^2 + y^2$

که پس از تفریق آنها از یکدیگر نتیجه میشود :

$$MA^2 - MB^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 = K$$

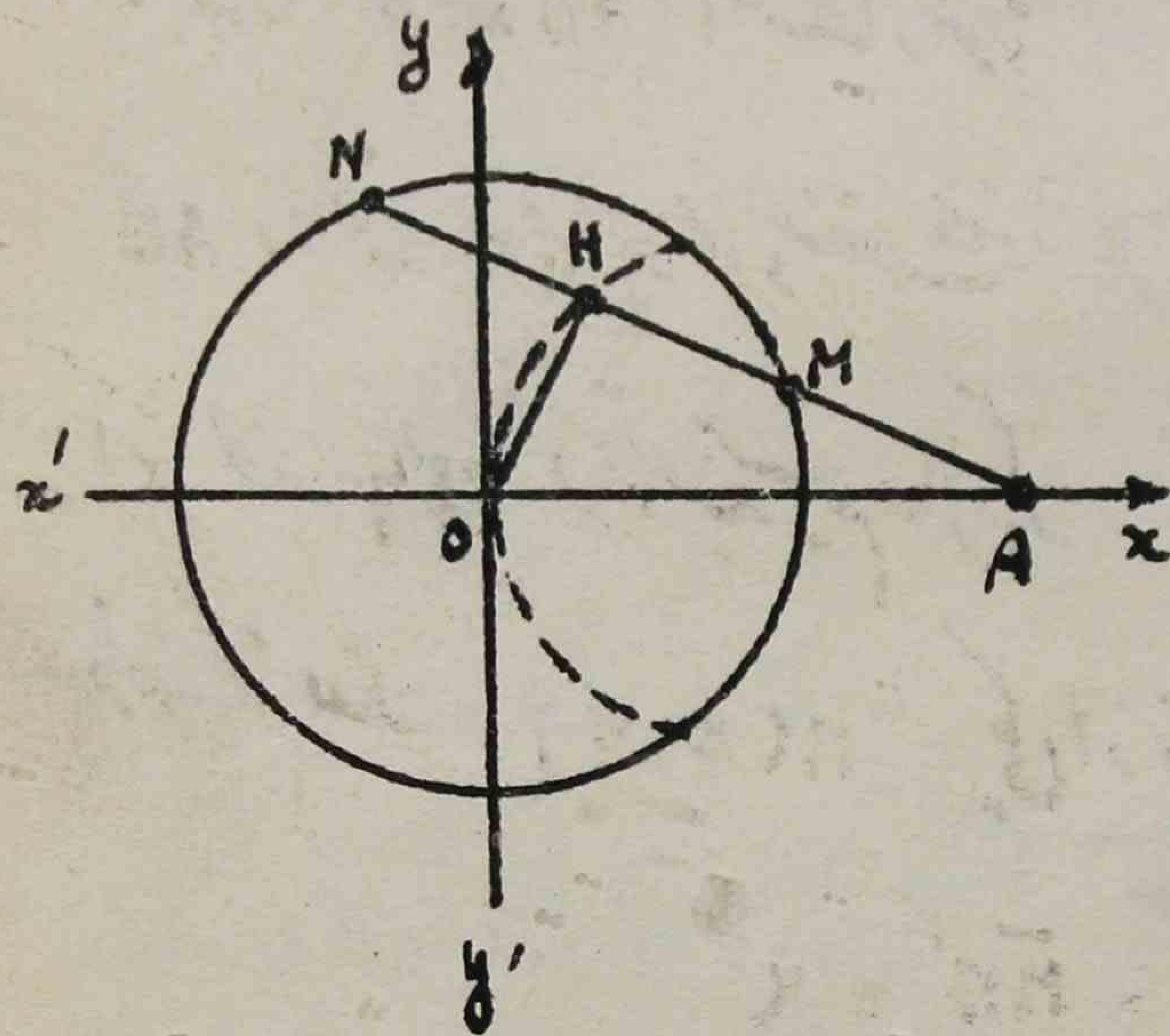
ویا

$$4ax = K$$

واز آنجا $x = \frac{K}{4a} = \frac{K}{2 \times AB}$ یعنی مکان مطلوب خطی است عمود

بر AB که موقع آن از نقطه O وسط AB بفاصله $\frac{K}{2AB}$ میباشد.

مسئله ۳ - دایرهٔ O و نقطه ثابت A را که بفاصلهٔ $OA = a$ میباشد اختیار نموده از نقطه A قاطع غیر مشخص بر دایره رسم میکنیم مطلوبست مکان نقطه H وسط وتر MN



OA را وصل نموده آنرا محور $x'x$ و عمود وارد از O را محور $y'y$ قرار میدهیم

و بنا بر آنچه میدانیم نقطه H وسط وتر MN موقع عمود وارد از O بر وتر مزبور میباشد حال اگر ضریب زاویه قاطع را λ فرض کنیم معادلهٔ قاطع بصورت $y = \lambda(x - a)$

و معادلهٔ OH بصورت $y = \frac{-1}{\lambda}x$ میباشد بطوریکه برای تعیین مکان H کافیست در این دو معادله λ را حذف کنیم تا حاصل شود :

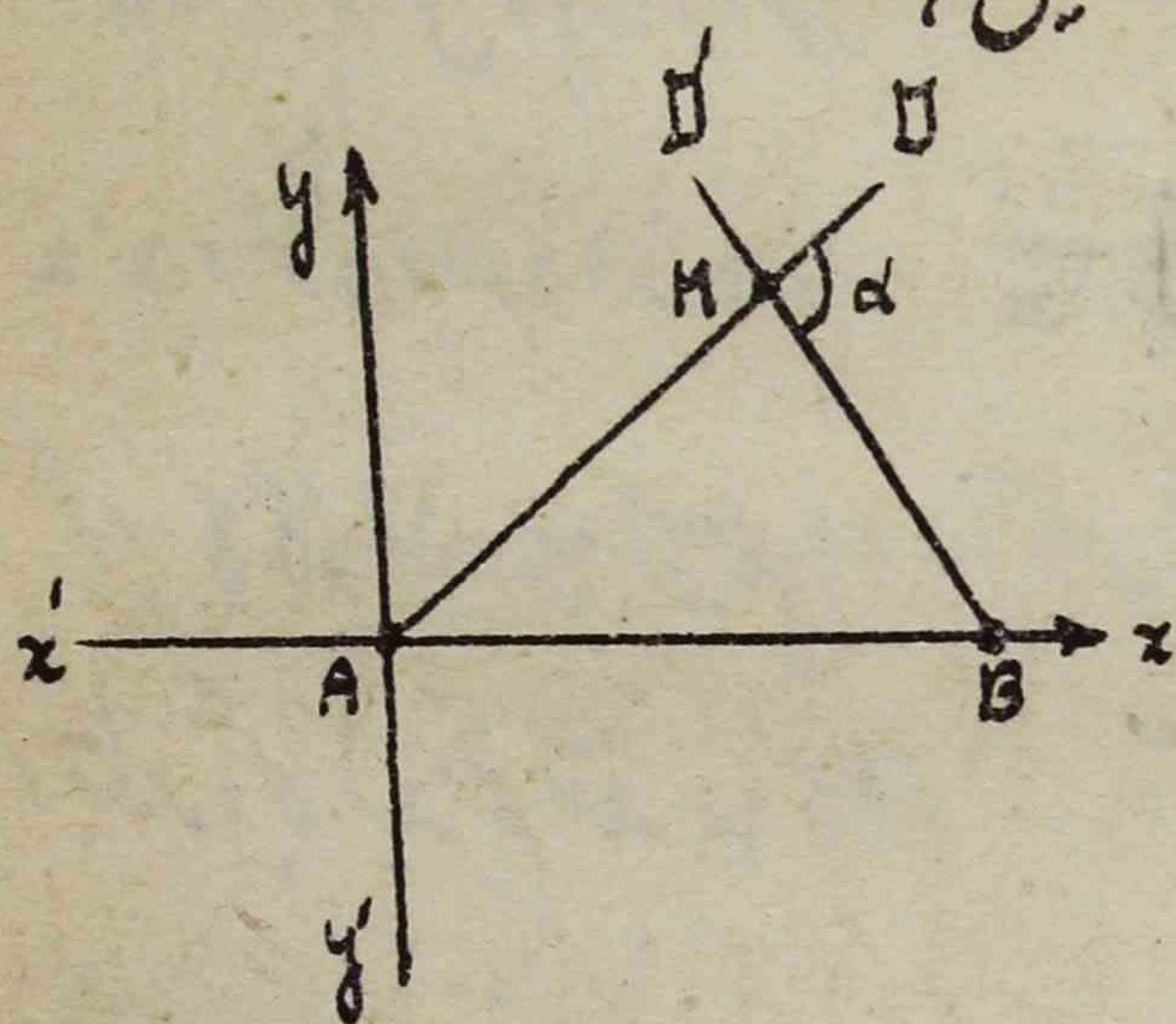
$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

که معادلهٔ دایره ایست بقطر OA

واضح است که فقط جزئی از دائره فوق مکان محسوب میشود که در داخل دایره مفروض واقع باشد بطوریکه برای تعیین طول نقاط تقاطع دو دایره که مکان

بدان محدود میشود کافیست که معادله مکان را با معادله دایره مفروض که عبارتست از $x^2+y^2=R^2$ حل کنیم تا حاصل شود $x=\frac{R^2}{a}$

مسئله ۴ – مطلوبست مکان نقاط تقاطع دو خط که بر نقطه ثابتی مرور نموده و با یکدیگر زاویه ثابت α را تشکیل دهند



فرض میکنیم A و B دو نقطه ثابت و $AB=a$ باشد AB را محور $x'x$ و عمود وارد از A را بر AB محور $y'y$ قرار داده دو خط Δ و Δ' را فرض میکنیم که بر A و B مرور نموده و با یکدیگر زاویه α تشکیل دهند چون ضریب زاویه Δ را m و ضریب زاویهٔ Δ' را m' فرض کنیم معادلهٔ خط Δ و Δ' عبارت خواهد بود از :

$$y = mx$$

$$y = m'(x-a)$$

حال برای آنکه دو خط با یکدیگر زاویه α تشکیل دهند کافیست که

$$\operatorname{tg}\alpha \quad \frac{m'-m}{1+m'm}$$

باشد و چون ما بین سه رابطه فوق m و m' را حذف کنیم حاصل میشود:

$$x^2 + y^2 \quad 2x + \frac{a}{2\alpha} y = 0$$

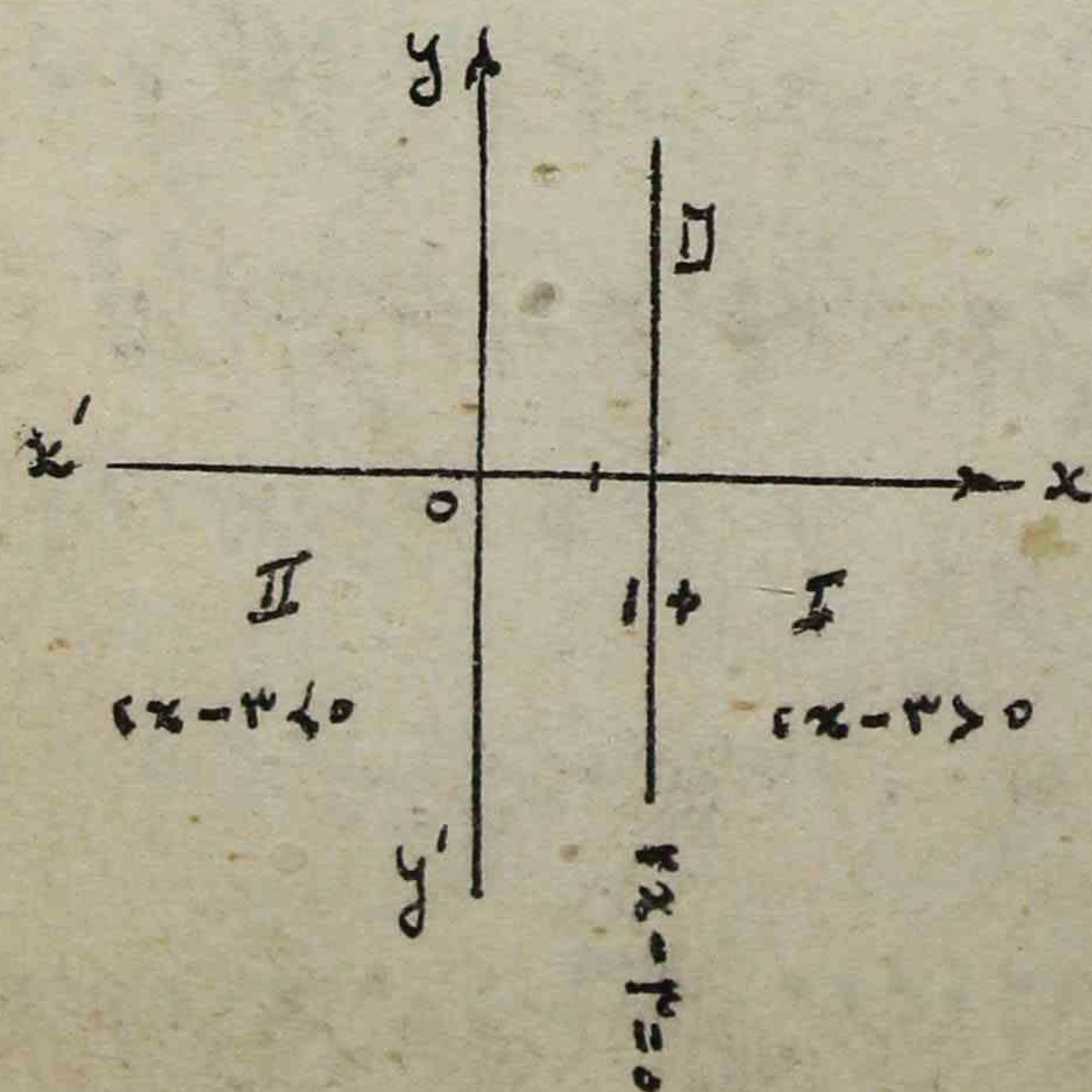
که عبارتست از معادله دایرهٔ مارّ بر A و B که مختصات مرکز آنرا نیز بسهولت میتوان حساب نمود

تعبیر هندسی حلّ معادله‌های یک یا دو مجهولی

۳۱ - تعبیر هندسی علامت عبارت یک مجهولی ۲x-۳ -

چون عبارت فوق را مساوی صفر قرار داده آنرا نسبت به x حلّ کنیم حاصل میشود:

$x = \frac{3}{2}$ حال خط D را بمعادله $x = \frac{3}{2}$ رسم میکنیم این خط سطح دو محور را بدو نیم سطح تقسیم مینماید بنابرآنکه x طول نقاط واقعه در سطح دو محور مفروض باشد برای نقاط واقعه در ناحیه I عبارت ۲x-۳ مثبت و

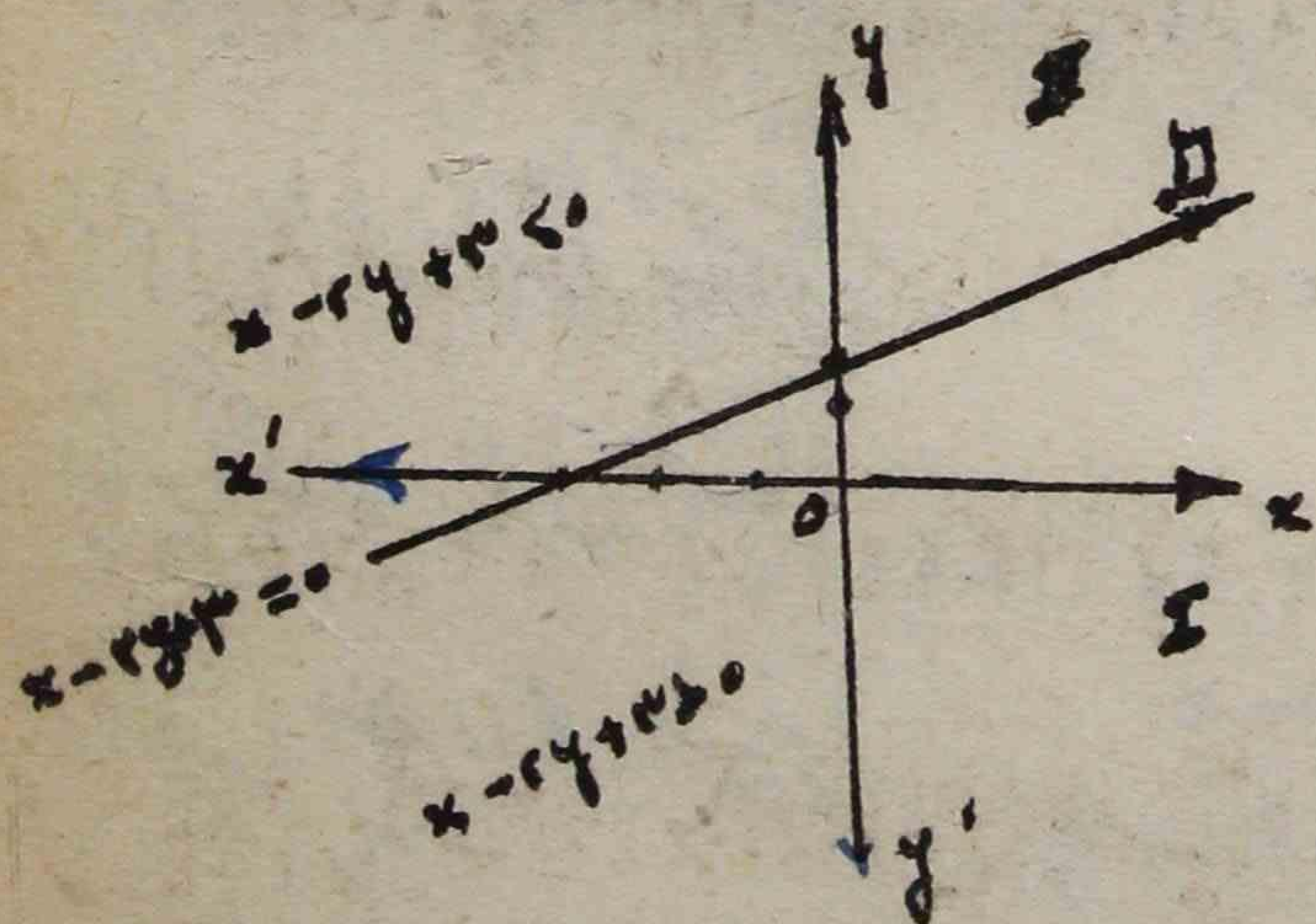


برای نقاط واقعه در ناحیه II عبارت ۲x-۳ منفی و برای نقاط واقعه در روی

خط II عبارت $2x-3$ مساوی صفر میباشد بطوریکه خط II و نیم سطح I و II بترتیب تعبیر هندسی معادلهٔ $2x-3=0$ و نامعادله‌های $2x-3<0$ و $2x-3>0$ خواهد بود

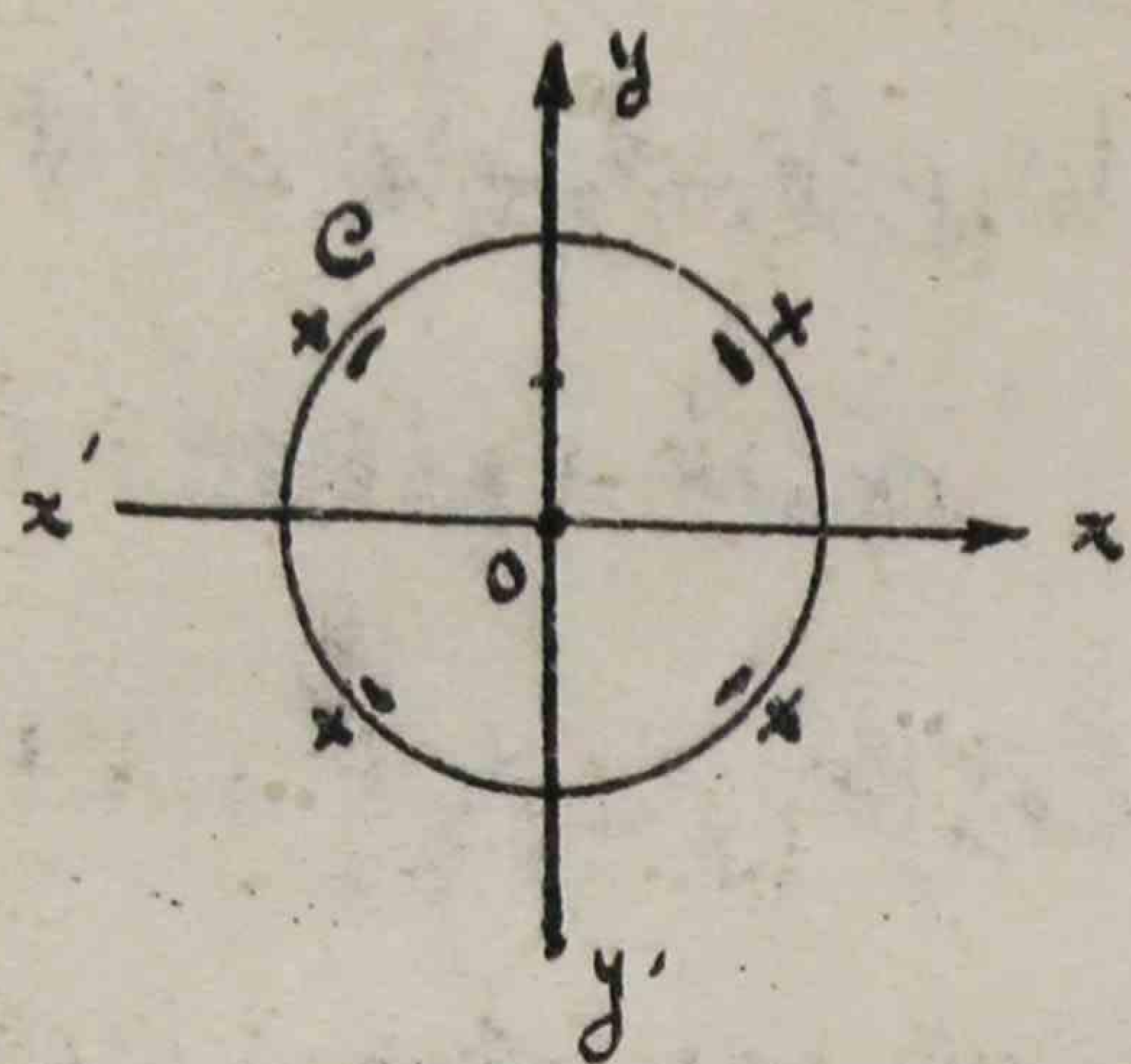
۳۲ - **تعبیر هندسی علامت عبارت دو مجهولی $x-2y+4$** -

چون عبارت فوق را مساوی صفر قرار داده x و y را مختصات نقاط واقعه در سطح دو محور قائم فرض کنیم و خط II بمعادله $x-2y+4=0$ را رسم کنیم این خط نیز سطح دو محور را بدو نیم سطح تقسیم مینماید برای نقاط واقعه در نیم سطح I عبارت فوق مثبت و برای نقاط واقعه در نیم سطح II عبارت فوق منفی و برای نقاط واقعه در روی خط II عبارت فوق مساوی صفر خواهد بود بطوریکه خط II و نیم سطح I و II بترتیب تعبیر هندسی معادله $x-2y+4=0$ و نامعادلات $x-2y+4>0$ و $x-2y+4<0$ میباشند



۳۳ - **تعبیر هندسی علامت عبارت دو مجهولی درجهٔ دوم**

چون عبارت x^2+y^2-4



فوق را مساوی صفر قرار دهیم حاصل
میشود $x^2+y^2=4$ حال اگر x
و y را مختصات نقطه مفروضه واقعه
درسطح دو محور قائم فرض نموده دایرهٔ
C را بمعادله $x^2+y^2=4$ رسم کنیم این دایره سطح دو محور را بدو قسمت تقسیم
مینماید برای نقاط واقعه در داخل دایره عبارت فوق منفی و برای نقاط واقعه
درخارج دایره عبارت فوق مثبت و برای نقاط واقعه در روی دایره عبارت
فوق مساوی صفر میباشد بطوریکه نقاط واقعه برروی دایره یا خارج دایره و یا داخل
آن بترتیب تعبیر هندسی معادله $x^2+y^2=4$ و نامعادلات
$x^2+y^2-4>0$ و $x^2+y^2-4<0$ خواهند بود

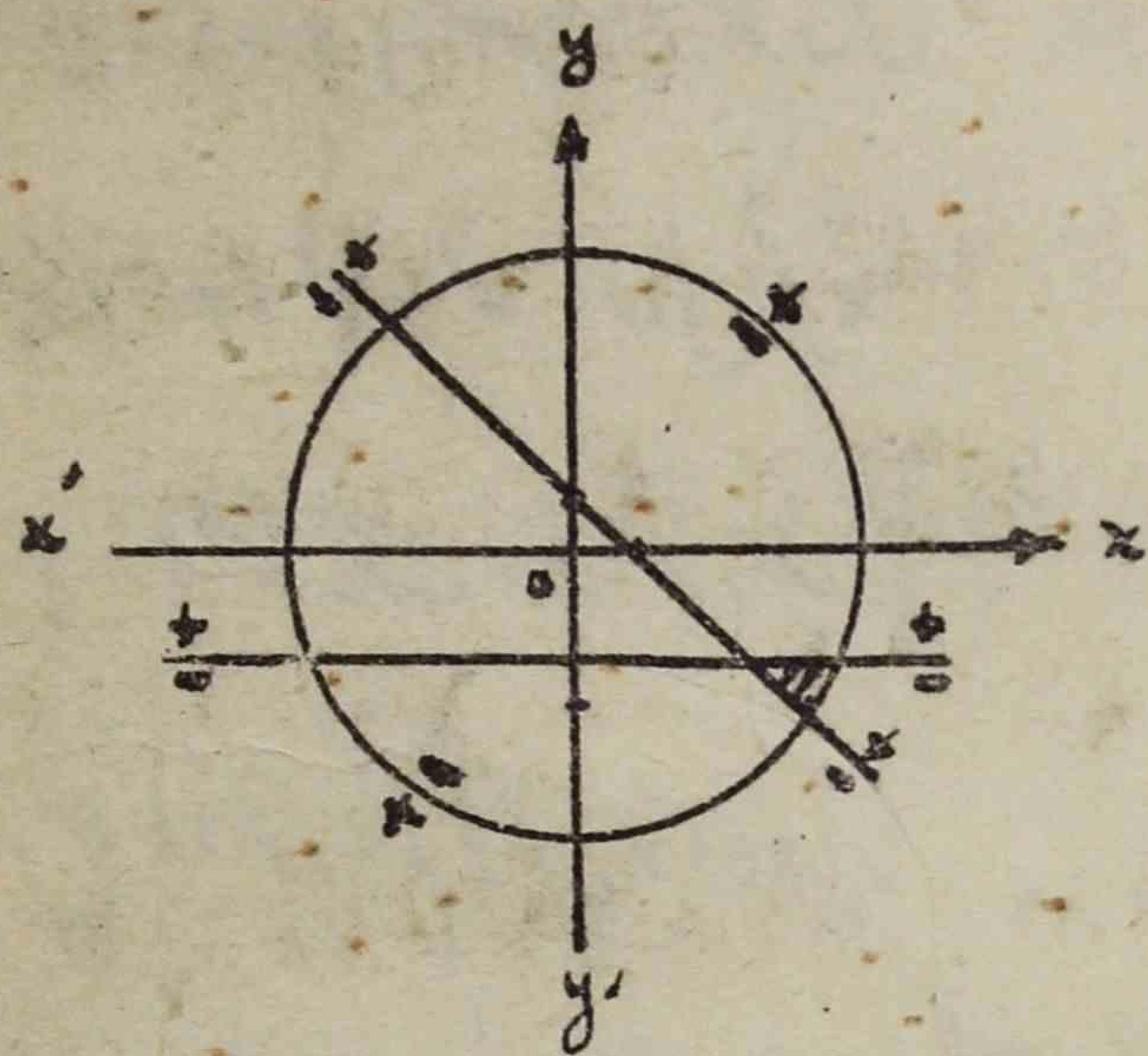
برای آنکه بموارد استعمال مطالب فوق آشنا شویم مسائل ذیل را حل میکنیم

مسئله ۱ — مطلوبست تعیین مکان نقاطی از سطح دو محور قائم که مختصات
آنها در نامعادلات ذیل صدق نمایند

$$x^2+y^2-4<0 \qquad 2x+3y-1>0 \qquad 3y+2<0$$



هریک از عبارات فوق را مساوی صفر قرار داده خط نظیر آنهارا رسم میکنیم



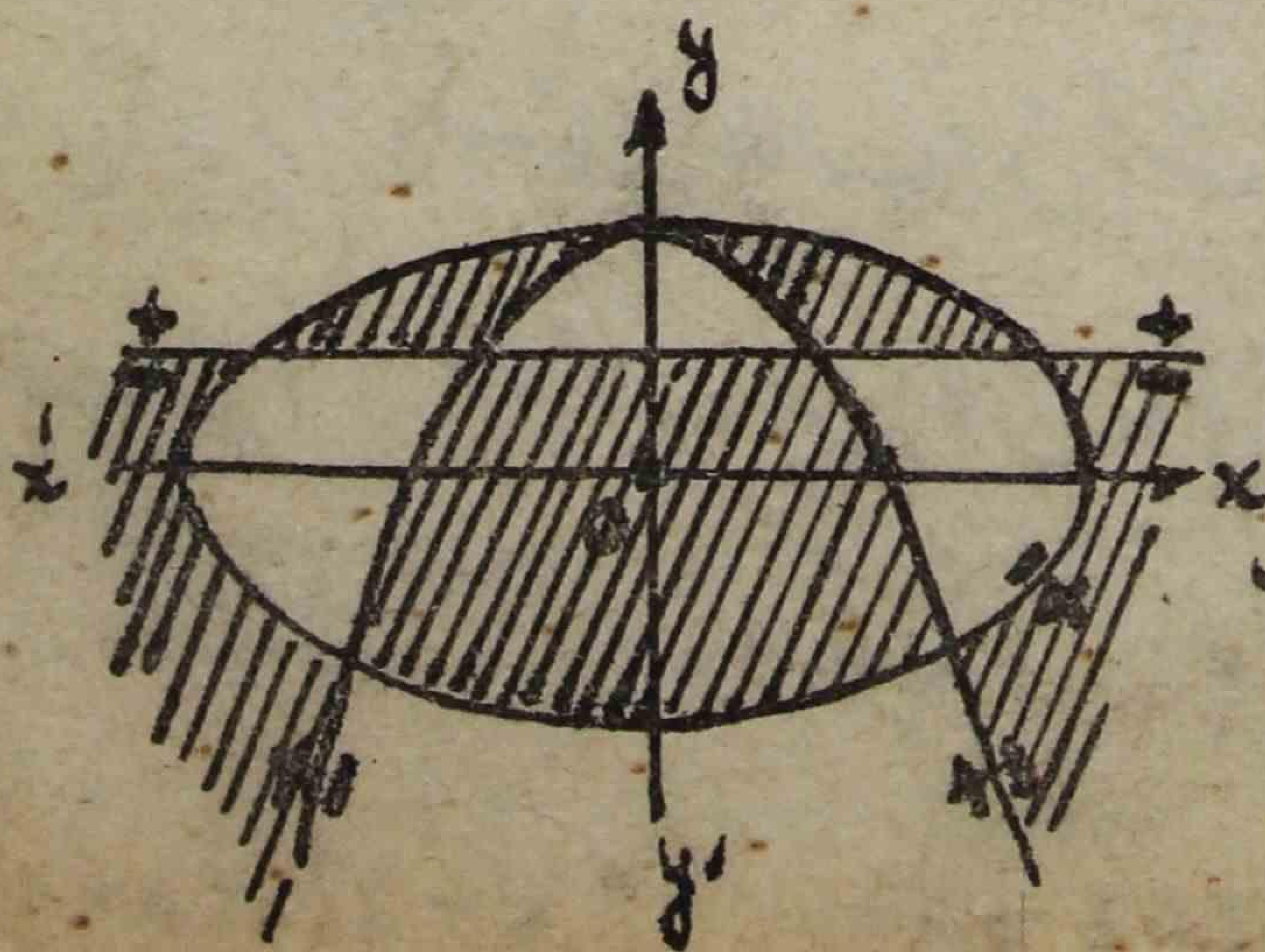
و علامت عبارات را در طرفین
خطوط تعیین مینمائیم در اینصورت
ناحیه که در شکل با پرداز مشخص
میباشد جواب مسئله خواهد بود

مسئله ۲ - مطلوبست

تعیین مکان نقاطی از سطح دو محور قائم که مختصات آنها در عبارت ذیل صدق نماید

$$(2y-1)(-y-x^2+1)(x^2+4y^2-4)>0$$

هریک از عوامل فوق را مساوی صفر قرار میدهیم و نمایش هندسی آنهارا که
اولی خط مستقیم و دومی سهمی و سومی بیضی میباشد رسم نموده علامت عبارات
فوق را در طرفین خطوط تحقیق مینمائیم و بعد از ضرب علامات با ملاحظه جهت نا
مساوی عبارت مفروض نواحی را



که در شکل با پرداز مشخص شده است
و جواب مسئله است بدست
میآوریم

(مسائل)

۲۸ - منحنیهای ذیل را رسم کنید :

$$x^2+y^2=9 \qquad (x-1)^2+(y+2)^2=1 \qquad x^2+y^2-4x-6y-12=0$$

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \qquad 4(x-1)^2+9(y-3)^2=36 \qquad y^2=6x$$

$$y^2=x+1 \qquad y=x^2 \qquad y=(x+2)^2 \qquad y=x^2-3x+2$$

$$x^2+4xy+4y^2-6x+4y+6=0 \qquad x^2+4xy+4y^2+2x+4y+1=0$$

۲۹ - مطلوبست معادلهٔ چهار دایرهٔ بشعاع R که بر مبدأ O مرور نموده و مرکز آنها بروی محورها واقع باشد همچنین مطلوبست معادلهٔ دایرهٔ محیط بر چهار دایرهٔ فوق و معادلهٔ دایره مار بر مراکز آنها

۳۰ - مطلوبست معادلهٔ چهار دایرهٔ بشعاع R مماس بر محورها و معادلهٔ دو دایره مماس بر دوایر فوق و همچنین معادله دایره مار بر مراکز آنها

۳۱ - معادله دایرهٔ عبارتست از

$$x^2+y^2-4x-10y+13=0$$

مطلوبست مختصات مرکز و طول شعاع آن و همچنین معادلات مماسهای بر دایره در نقطه تقاطع با محورها

۳۲ - دایرهٔ بر نقطه (۵ و ۳) مرور نموده محور y ها را در نقاط A و B قطع میکند بطریقی که $\overline{OA}=4$ و $\overline{OB}=-2$ میباشد مطلوبست معادله دایره و مختصات مرکز و طول



شعاع آن

۳۳ - دایره بر سه نقطه $A(1, 1)$ و $B(0, 2)$ و $C(2, 2)$ مرور میکند معادله دایره و مختصات مرکز و طول شعاع آنرا معلوم کنید

۳۴ - دایرهٔ $x^2 + y^2 = 20$ و خط $y = x - 2$ مفروضند مطلوبست اولاً مختصات نقطه تقاطع خط و دایره ثانیاً معادله مماس بر دایرهٔ فوق موازی با خط مفروض

۳۵ - مطلوبست معادله دایرهٔ که مختصات مرکز آن $(1, 3)$ بوده و بر خط $3x + 4y + 7 = 0$ مماس باشد

۳۶ - ثابت کنید که دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2mx + 2m - 2 = 0$ بازاء جمیع مقادیر m از دو نقطه ثابت مرور مینماید و مختصات این دو نقطه را تعیین کنید

۳۷ - دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ مفروض است دو نقطه $A(x_0, y_0)$ و $P(x, y)$ را در سطح این دایره اختیار نموده و فرض میکنیم M نقطه از خط AP باشد بطریقی که $\frac{MA}{MP} = -m$ باشد اولاً مطلوبست مقادیر m' و m'' از m نظیر نقاط M' و M'' محل تقاطع خط AP با دایرهٔ فوق ثانیاً ثابت کنید که مکان هندسی نقطه P مزدوج توافقی نقطه A نسبت بنقاط تقاطع دایرهٔ مذکور با خط مار بر نقطه A خطی است مستقیم (این خط را قطبی A نسبت بدایره مینامند)

۳۸ - اولاً بیضی بمعادلهٔ $4x^2 + 9y^2 = 36$ را رسم نمائید ثانیاً خط $2y = mx + 5$ را فرض میکنیم مقدار m را بطریقی تعیین کنید که خط با بیضی

مماس باشد و فاصله مرکز بیضی را ازاین خط مماس حساب کنید

۳۹ - بیضی بواسطهٔ محور اطول آن $2a$ و فاصلهٔ دو کانونش $2c$ مشخص است نقطهٔ مانند M در روی آن بفاصله معلوم R از یکی از دو کانون اختیار شده است مطلوبست محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه M از مرکز واز دو محور بیضی

۴۰ - محور اطول بیضی $2a$ و فاصلهٔ کانونیش $2c$ در دست است از مرکز آن بشعاع R دایرهٔ رسم میکنیم تا بیضی را در دو یا چهار نقطه M قطع کند مطلوبست محاسبهٔ اشعهٔ حامل یکی ازاین نقاط و از روی دستور حاصل شرط امکان مسئله را تحقیق کنید

۴۱ - دو معادله $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ و $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مفروض‌اند اولاً تعیین کنید که دو معادله نمایش چه خطوطی هستند ثانیاً مطلوبست حل وبحث دستگاه دو معادله وتعیین آنکه چه رابطهٔ بایستی مابین مقادیر a و b و p و q موجود باشد برای آنکه دو خط معادلات فوق مماس باشند ثالثاً درصورتیکه a و b و p و q مقادیر غیر مشخصی داشته باشند مطلوبست محاسبه مختصات نقطه H وسط خط MM' بنابرآنکه M و M' محل تقاطع آنها باشد

۴۲ - سهمی بمعادله $y^2=2px$ مفروض است اولاً بازاء $p=2$ آنرا رسم کنید ثانیاً مطلوبست تعیین نقطه مانند M براین سهمی بطوریکه مجموع مربعین فواصلش از راس وکانون مساوی مقدار معلوم k^2 باشد

۴۳ - در سهمی $y^2=2px$ وتر MN بطول معلوم a و مار بر کانون را اختیار نموده قطعات FM و FN را برحسب a و p حساب کنید



۴۴ - سهمی بمعادله $y^2=2px$ مفروض است دایرهٔ بمرکز رأس سهمی و مار بر کانون F را رسم مینمائیم تا سهمی را در دو نقطه M و M' قطع نماید مطلوبست فاصلهٔ M از کانون F و محور سهمی

۴۵ - معادلات دو سهمی عبارتست از $y^2=ax$ و $x^2=by$ که در آنها a و b مختصات نقطه C از سطح دو محور میباشد مطلوبست اولاً محاسبهٔ مختصات نقطه دیگر I فصل مشترک دو سهمی برحسب a و b ثانیاً محاسبهٔ ضریب زاویهٔ CI و اثبات آنکه زاویه $\widehat{CIO}$ قائمه میباشد

۴۶ - سهمی بمعادلهٔ $y^2=2px$ مفروض است اولاً فرض میکنیم نقطه M بمختصات x و y روی خطی موازی با محور سهمی حرکت کند تعیین کنید علامت y^2-2px چگونه تغییر میکند ثانیاً اگر فرض کنیم نقطه M در سطح دو محور حرکت کند مطلوبست ناحیه از سطح که اگر نقطه M در آن واقع باشد عبارت y^2-2px مثبت بوده و یا آنکه منفی باشد ثالثاً مطلوبست مختصات محل تقاطع خط $y=mx+n$ با سهمی و بحث در آن و تعیین معادلهٔ مماس بر سهمی بضریب زاویهٔ m از روی بحث فوق رابعاً نقطه بمختصات α و β را در سطح دو محور اختیار میکنیم مطلوبست تشکیل معادله که ریشه‌های آن ضریب زاویه مماسهای موسوم از این نقطه بر سهمی باشد (بحث)

۴۷ - محور یا مرکز تقارن منحنیات ذیل را معلوم کنید

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (x-1)^2+(y+3)^2=16 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$y=(x+2)^3+x-3$ $\qquad$ $y^2=6x+5$ $\qquad$ $4(x-2)^2+9(y+1)^2=1$

$2x^2+2xy+y^2-10x-2y+4=0$ $\qquad$ $x^2+4xy+4y^2+6x+4y-2=0$

۴۸ – نقطه مفروضه M بمختصات $x=m-1$ و $y=2m+5$ مفروض است
مطلوبست معادله ورسم مکان نقطه M هرگاه m تغییر کند

۴۹ – مختصات نقطه متحرکی بحسب زمان عبارتست از $x=3t^2+1$ و $y=2t^3$
مطلوبست معادله ورسم مسیر آن

۵۰ – دو نقطه ثابت درروی ox مفروض است ازاین دو نقطه دو خط مرور نماید که درروی
oy تقاطع مینمایند از دو نقطه ثابت فوق دو خط برخطوط مفروض عمود میکنیم مطلوبست
مکان نقطه تقاطع این دو عمود

۵۱ – مثلث متساوی الساقینی است که ارتفاع آن OA میباشد خط PQ را موازی
قاعده رسم میکنیم تا OQ را درنقطه M قطع کند مطلوبست مکان فصل مشترک OP
با AQ و OQ با AP

۵۲ – مطلوبست مکان مراکز مربع مستطیلهای محاط درمثلث مفروض

۵۳ – دو محور قائم ox و oy وخط AB موازی oy مفروض است درروی
oy نقطه متغیر M ودرروی AB نقطه C را فرض میکنیم بطریقی که $AC=2OM$
باشد مطلوبست مکان تصویر نقطه M بر روی BC

۵۴ – مطلوبست مکان اوساط وترهای دایره که بر نقطه ثابتی مرور مینمایند درحالتیکه



اولاً نقطه داخل دایره ثانیاً درروی دایره ثالثاً در خارج دایره باشد

۵۵ - دایرهٔ O بقطر AB و نقطه متغیر M درروی این دایره مفروض است دوایر محیطیه مثلثات MOA و MOB را رسم میکنیم اولاً ثابت کنید که حاصل ضرب عرضهای مراکز P و Q این دو دایره مقداریست ثابت ثانیاً مطلوبست مکان فصل مشترک خطوط AP و BQ

۵۶ - درروی عمود مرسومهٔ از نقطه P درروی قطعه خط AA' نقطه M را فرض میکنیم بطریقی که نسبت $\frac{MP^2}{PA \times PA'}$ مقدار ثابت باشد مطلوبست مکان نقطه M هرگاه P درروی قطعه خط AA' تغییر مکان دهد و هرگاه R و R' نقاط تقاطع خطوط MA و MA' با عمود مرسوم از O وسط AA' باشد ثابت کنید که حاصل ضرب $OR \times OR'$ مقداریست ثابت

۵۷ - دو نقطه ثابت A و A' بفاصله $AA' = 2a$ و Oy عمود منصف آن مفروض است از نقطهٔ A' خط غیر مشخصی رسم میکنیم که Oy را در نقطهٔ B قطع کند نقطه A را به B وصل نموده و از نقطه A عمودی بر AB اخراج میکنیم تا A'B را در نقطه M قطع کند مطلوبست مکان نقطهٔ M

۵۸ - فرض میکنیم OA و OB دو شعاع قائم دایره مفروض و CD نیم وتر متغیری موازی OA باشد مطلوبست مکان نقطه تقاطع خطوط OD و AC

۵۹ - هرگاه a و b مختصات نقطه مفروضه M واقعه درسطح دو محور قائم باشد مطلوبست X

مکان نقطه M برای آنکه دو خط :

$$ax-(b-1)y+1=0$$

$$4x+3y+2=0$$

اولاً موازی ثانیاً متقاطع باشند

X ۶۰- معادلات دو خط عبارتست از :

$$(a+2)x+(a+3b+5)y+3=0$$

$$(a+2)x-(2a+b-2)y-2=0$$

که در آن a و b مختصات نقطه مفروضه M واقعه در سطح دو محور قائم میباشد مطلوبست مکان نقطه M برای آنکه اولاً دو خط فوق موازی ثانیاً منطبق باشند

۶۱- مطلوبست مکان نقاطی که مختصات آنها در سه نامعادله ذیل صدق نماید

$$x^2+y^2-1>0 \qquad x+y-1>0 \qquad y-x+\frac{1}{x}<0$$

۶۲- مطلوبست مکان نقاطی که مختصات آنها در هریک از روابط ذیل صدق نماید

$$(3x-2y)(x-y+1)(4x-2y+1)<0$$

$$(x+y-1)(2x-y+1)(2x-y)>0$$

$$(2x+y-1)(x^2+y^2-1)>0$$

$$(y-x^2)(x^2+y^2-1)(x^2-y^2)>0$$

$$(y-x^2)(x+y-1)\left[x^2-(y+1)^2\right]<0$$

۶۳- نقطه M بمختصات a و b مفروض است مطلوبست مکان نقطه M بطریقی که نامعادله



ذیل همواره برقرار باشد $2x^2 - 2bx + ab > 0$

۶۴- معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2 - 2(a+b)x + a - b^2 = 0$$

که در آن a و b مختصات نقطه مفروضه M واقعه در سطح دو محور قائم میباشد مفروض است مطلوبست اولاً بحث در وجود و علامت ریشه‌های آن برحسب موضع نقطه M در سطح دو محور، ثانیاً مقایسهٔ ریشه‌های آن با -1 و $+1$

۶۵- در روی محور $x'x$ و در طرفین نقطه O دو نقطه A و A' را بطریقی فرض میکنیم که $OA = OA' = a$ باشد و بعد در یکطرف نقطه O دو نقطه متغیر D و D' را که بواسطهٔ رابطه $\frac{DA}{DA'} = \frac{D'A}{D'A'}$ بیکدیگر بستگی دارند جدا نموده و فرض میکنیم که نقطه P وسط DD' و $OP = x$ باشد مطلوبست اولاً محاسبهٔ قطعات OD و OD' و DD' برحسب x ثانیاً در روی عمود مرسوم بر $x'x$ از نقطه P طول $PM = \frac{DD'}{2}$ را جدا نموده نقطه M را به دو نقطه F و F' بنابرانکه $OF = OF' = a\sqrt{2}$ باشد وصل میکنیم مطلوبست محاسبهٔ MF' و MF و همچنین محاسبهٔ تفاضل آنها و از روی آن تحقیق مکان نقطه M هرگاه D و D' تغییر نماید

متغیّر و تابع

۲۴ — **متغیر** — کمیتی را که بتواند مقادیر مختلفه اختیار کند متغیّر مینامند وعموماً آنرا بحروف اواخر الفبا مانند x و y و z نمایش میدهند

۲۵ — **تابع** — هرگاه مابین دو متغیّر رابطهٔ باشد بطریقی که تغییر یکی مستلزم تغییر دیگری باشد یکی را تابع دیگری خوانند

مثلاً محیط دایره تابعی است از شعاع آن وسطح مربع تابعی است از طول ضلع آن

هرگاه متغیّر y تابع متغیّر x باشد آنرا بصورت ذیل مینویسند $y = f(x)$

ممکن است متغیّری تابع چندین متغیّر دیگر باشد مثلاً حجم بخار تابعی است از فشار و درجهٔ حرارت آن همچنین حجم مکعب مستطیل تابعی است از سه بعد آن

هرگاه متغیّر v تابع سه متغیّر x و y و z باشد آنرا باینصورت بنویسند

$$v = f(x, y, z)$$

در هر معادلهٔ چند مجهولی بصورت کلّی $f(x, y, z \ldots) = 0$ هریک از مجهولات را میتوان تابع مجهولات دیگر فرض نمود مثلاً چون معادلهٔ $3x - 2y - 4 = 0$ را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود $y = \frac{3}{2}x - 2$ وچنانکه ملاحظه میشود در معادلهٔ اخیر y را میتوان تابع x فرض نمود همچنین اگر معادلهٔ $6x - 7y - 2z - 8 = 0$

را نسبت به z حل کنیم حاصل میشود . $z = 3x - \frac{7}{2}y - 4$ که در آن z تابعی است از دو متغیر x و y

۳۶ - **متغیری که به بینهایت میل کند** - میگویند متغیر x میل میکند بسمت $+\infty$ هرگاه مقادیر آن رفته رفته بزرگ شده و از هر عدد مثبت مفروض بزرگتر گردد، همچنین میگویند متغیر x میل میکند بسمت $-\infty$ هرگاه مقادیر آن رفته رفته کوچک شده و از هر عدد منفی کوچکی کوچکتر گردد و یا بعبارة اخری قدر مطلق آن از هر عدد مفروض بزرگتر گردد

حدود

۳۷ - **تعریف حد** - هرگاه a مقدار معلومی باشد میگوئیم a حد متغیر x است یا x میل میکند بسمت a هرگاه $|a - x|$ از هر عدد مثبت مفروضی کوچکتر گردد و یا بعبارة اخری $|a - x|$ میل کند بسمت صفر مثلاً هرگاه متغیر x مرتباً مقادیر :

۱٫۹ ، ۱٫۹۹ ، ۱٫۹۹۹ ، ۱٫۹۹۹۹ ....

و یا مقادیر ۲٫۱ ، ۲٫۰۱ ، ۲٫۰۰۱ ....

را اختیار نماید میگوئیم x میل میکند بسمت ۲ و یا آنکه حد متغیر x عبارتست از ۲

چه ملاحظه میشود که | ۲ - ۱,۹۹۹... | و یا | ۲ - ۲,۰۰۰...۱ |
رفته رفته از هر عدد مثبت مفروض کوچکتر شده و بنا بر این میل میکند بسمت صفر

۳۸ - **خواص راجع بحدود** - خواص ذیل را راجع بحدود همواره باید
بخاطر داشت

۱- هرگاه دو متغیر همیشه با هم مساوی باشند و یکی از آنها بسمت حدی میل کند دیگری هم بهمان حد میل مینماید

۲- حد مجموع چندین متغیر که هریک بسمت حدی میل نمایند عبارتست از مجموع حدود آنها

۳- حد حاصل ضرب مقدار ثابتی در عبارتی که بسمت حدی میل مینماید برابرست با حاصل ضرب مقدار ثابت در حد عبارت متغیر

۴- حد حاصل ضرب دو یا چند متغیر که هریک بسمت حدی میل نمایند عبارتست از حاصل ضرب حدود آنها

۵- حد نسبت دو متغیر که هریک بسمت حدی میل نمایند عبارتست از نسبت حدود آنها



۶- حد قوه هر متغیر که بسمت حدی میل کند عبارتست از قوه حد

۷- حد ریشه هر متغیر که بسمت حدی میل نماید عبارتست از ریشه حد

۳۹ - مقدار بعضی توابع هرگاه متغیر بسمت حدی میل کند -

در تابع $y = 2x + 3$ فرض میکنیم x رفته رفته بزرگ شده و میل کند بسمت ۵ یا آنکه رفته رفته کوچک شده و میل کند بسمت ۵ در اینصورت مقادیر نظیر تابع مرتباً عبارت میگردد :

$x_1 = 4.9$	$y_1 = 12.8$	$x_1 = 5.1$	$y_1 = 13.2$
$x_2 = 4.99$	$y_2 = 12.98$	$x_2 = 5.01$	$y_2 = 13.02$
$x_3 = 4.999$	$y_3 = 12.998$	$x_3 = 5.001$	$y_3 = 13.002$
....	....	....	....

چنانکه از جدول فوق ملاحظه میشود هرچه که x میل کند بسمت ۵ تفاضل $|y-13|$ میل میکند بسمت صفر یعنی y میل میکند بسمت ۱۳ بنابراین حد y هرگاه x میل کند بسمت ۵ عبارتست از ۱۳

چون بطریقی مشابه بافوق استدلال کنیم نتیجه میشود :

۱- هرگاه صورت کسری میل کند بسمت صفر و مخرج آن مخالف صفر باشد حد کسر مساوی صفر میباشد

مثلاً در تابع $y = \frac{x-1}{x+5}$ چون فرض میکنیم x میل کند بسمت واحد مخرج میل میکند بسمت ۶ و صورت میل میکند بسمت صفر و در اینصورت حد کسر مساوی صفر میگردد

۲- هرگاه مخرج کسری میل کند بسمت صفر و صورت آن مخالف صفر باشد کسر میل میکند بسمت بینهایت حال بنابرآنکه صفر مخرج حد مقادیر مثبت یا منفی باشد کسر بینهایتی است بعلامت صورت و یا مخالف علامت صورت و در صورتیکه صفر مخرج حد مقادیر مثبت و حد مقادیر منفی هر دو باشد کسر بینهایتی است بعلامت مثبت و منفی بطوریکه میگویند کسر در اینحالت میل میکند بسمت $\pm\infty$ و یا بعبارة اخری کسر منفصل میگردد

مثلاً در تابع $y = \frac{x-1}{(x-5)^2}$ چون فرض کنیم x میل کند بسمت ۵ مخرج میل میکند بسمت صفر و صورت میل میکند بسمت ۴ ولی چون مخرج بازاء مقادیر $x = 5 \pm \varepsilon$ همواره مثبت است لذا علامت کسر بازاء $x = 5$ بعلامت صورت و بنابراین مثبت میباشد بطوریکه کسر فوق بازاء $x = 5$ برابر است با $+\infty$

همچنین در تابع $y = \frac{x-1}{(x+5)^2}$ هرگاه فرض کنیم x میل کند بسمت ۵-

مخرج میل میکند بسمت صفر و صورت میل میکند بسمت ۶- ولی چون مخرج بازاء
مقادیر $x=-5\pm4$ همواره مثبت است لذا علامت کسر بازاء $x=-5$
بعلامت صورت و بنابراین منفی میباشد بطوریکه کسر فوق بازاء $x=-5$
برابر است با $-\infty$.

بالاخره در تابع $y=\frac{x-1}{x-5}$ چون فرض کنیم x میل کند بسمت
۵ صورت میل میکند بسمت ۴ و مخرج میل میکند بسمت صفر ولی چون مخرج بازاء
$x=5+4$ مثبت و بازاء $x=5-4$ منفی میباشد لذا کسر فوق بازاء
$x=5$ برابر میگردد با $\pm\infty$

درچنین حالتی میگویند تابع $y=\frac{x-1}{x-5}$ بازاء $x=5$ منفصل و مقدار آن
برابر است با $\pm\infty$

۳ - کسریکه فقط صورت آن میل کند بسمت بینهایت میل میکند بسمت بینهایت
مثلاً در تابع $y=\frac{x-3}{5}$ چون فرض کنیم $x=\pm\infty$ باشد
مقدار $y=\pm\infty$ خواهد بود و همچنین در تابع $y=\frac{3-x}{5}$ بازاء $x=\pm\infty$
مقدار $y=\mp\infty$ میباشد و بالاخره در تابع $y=\frac{x^2-4}{5}$
بازاء $x=\pm\infty$ مقدار $y=+\infty$ میباشد

۳ - کسریکه فقط مخرج آن میل کند بسمت بینهایت میل میکند بسمت صفر

مثلاً در تابع $y = \frac{3}{x}$ هرگاه فرض کنیم $x = \pm\infty$ باشد

$y = 0$ میگردد

۴ - حد کثیر الجمله از x هرگاه در آن x میل کند بسمت $\pm\infty$ - در اینصورت حد کثیر الجمله بینهایت میگردد

مثلاً چون در تابع $y = 2x^3 - 4x + 1$

فرض کنیم x میل کند بسمت ∞ چون x^3 را فاکتور مشترک قرار دهیم

حاصل میشود $y = x^3 (2 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3})$ که در آن هرگاه $x = \pm\infty$

فرض شود $\frac{1}{x^3}$ و $\frac{4}{x^2}$ مساوی صفر شده و بنابراین مقدار $y = \pm\infty$ میگردد

همچنین بطریقی مشابه با فوق معلوم میشود که مقدار تابع $y = -2x^3 - 4x + 1$

بازاء $x = \pm\infty$ عبارتست از $y = \mp\infty$

وبالاخره مقدار تابع $y = 5x^4 + x^2 - 1$ بازاء $x = \pm\infty$ عبارتست

از $+\infty$

صور مبهمه

رفع ابهام و تعیین مقدار حقیقی عبارات مبهمه



۴۱ - **صورت $\frac{0}{0}$** - ممکن است بازاء مقداری از x صورت و مخرج کسری هردو مساوی صفر میگردد در اینصورت کسر بصورت $\frac{0}{0}$ درمیآید چون کسر فوق را مساوی با q فرض کنیم حاصل میشود $q = \frac{0}{0}$ و بنابر خاصیّت تقسیم میتوان نوشت $0 = q \times 0$

حال از عبارت اخیر معلوم میشود که برای q هر مقداری بطور اختیار میتوان فرض نمود بطوریکه برای کسر $\frac{0}{0}$ مقدار معیّن و مشخّص نمیتوان قرار داد و در اینحالت میگویند کسر فوق مبهم میباشد

۴۲ - **رفع ابهام از صورت $\frac{0}{0}$*** - هرگاه فرض کنیم تابع $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازاء $x = a$ بصورت $\frac{0}{0}$ درآید اغلب صورت و مخرج هردو دارای فاکتور یکی از قوای $x - a$ میباشند بطوریکه چون در صورت و مخرج قوای $x - a$ را فاکتور قرار دهیم حاصل میشود : $y = \frac{(x-a)^m \times f_1(x)}{(x-a)^n \times \varphi_1(x)}$

و چون کسر فوق را بساده‌ترین صورت تبدیل کنیم کسر جدیدی بدست میآید که بازاء جمیع مقادیر x با کسر مفروض معادل میباشد و لذا بطور قرارداد مقدار این کسر را بازاء $x = a$ مقدار حقیقی کسر مفروض نامیده و این عمل را رفع ابهام گویند

---

* قاعدهٔ دیگری نیز از راه استعمال مشتقات برای رفع ابهام از صورت فوق در این کتاب بیان خواهیم کرد

مثال ۱ ـ مطلوبست محاسبهٔ مقدار حقیقی $y = \frac{5x^2-3x-2}{x^2-4x+3}$

بازاء $x = 1$

تابع فوق را میتوان مرتباً بصور ذیل نوشت :

$$y = \frac{5x^2-3x-2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(5x+2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{5x+2}{x-3}$$

وچون مقدار کسر اخیر بازاء $x = 1$ برابر است با $-\frac{7}{2}$ لذا مقدار حقیقی تابع مفروض نیز بازاء $x = 1$ مساوی $-\frac{7}{2}$ خواهد بود

مثال ۲ ـ مطلوبست مقدار حقیقی تابع $y = \frac{x^2-2x-3}{x^3-8x^2+21x-18}$

بازاء $x = 3$

تابع فوق را مرتباً بصور ذیل مینویسیم :

$$y = \frac{x^2-2x-3}{x^3-8x^2+21x-18} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x-2)} = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

که مقدار آن بازاء $x = 3$ عبارت میگردد از $\pm\infty$

مثال ۳ ـ مطلوبست مقدار حقیقی تابع $y = \frac{x-4}{3-\sqrt{x^2-7}}$

بازاء $x = 4$

برای رفع ابهام صورت ومخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب نموده ساده میکنیم تا حاصل شود :

$$y = \frac{x-4}{3-\sqrt{x^2-7}} = \frac{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}{(3-\sqrt{x^2-7})(3+\sqrt{x^2-7})} =$$

$$= \frac{(x-4)(3+\sqrt{x^2-7})}{16-x^2} = \frac{-(3+\sqrt{x^2-7})}{x+4}$$

که مقدار آن بازاء $x=4$ عبارتست از $-\frac{3}{4} = -\frac{6}{8}$

۴۳ – صور مبهمهٔ دیگر $0\times\infty$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty-\infty$ –

صور فوق نیز قابل تبدیل بصورت $\frac{0}{0}$ بوده و بنابراین مبهم میباشند زیرا

اوّلاً فرض میکنیم $y = f(x)\times\varphi(x)$ باشد که در آن بازاء $x=a$

$f(x)=0$ و بازاء $x=a$ $\varphi(x)=\infty$ و بنابراین y بصورت

$0\times\infty$ باشد حال چون y را بصورت : $y = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$

بنویسیم ملاحظه میشود که بازاء $x=a$ صورت و مخرج هردو صفر و بنابراین y

بصورت $\frac{0}{0}$ در میآید

ثانیاً فرض میکنیم $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ باشد که در آن بازاء $x=a$ صورت

و مخرج هردو مساوی ∞ گردد حال چون y را بصورت :

$$y = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

بنویسیم ملاحظه میشود که صورت و مخرج کسر y بازاء $x=a$ هردو صفر و بنابراین کسر

فوق بصورت $\frac{0}{0}$ میباشد

ثالثاً فرض میکنیم $y = f(x) - \varphi(x)$ باشد که در آن بازاء $x = a$

$f(x) = \infty$ و $\varphi(x) = \infty$ باشد حال y را مرتباً بصور ذیل مینویسیم:

$$y = f(x) - \varphi(x) = \frac{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2}{f(x) + \varphi(x)} = \frac{\frac{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2}{[f(x)]^2 \times [\varphi(x)]^2}}{\frac{f(x) + \varphi(x)}{[f(x)]^2 \times [\varphi(x)]^2}}$$

$$\frac{\frac{1}{[\varphi(x)]^2} - \frac{1}{[f(x)]^2}}{\frac{1}{f(x) \times [\varphi(x)]^2} + \frac{1}{[f(x)]^2 \times \varphi(x)}}$$

که بازاء $x = a$ بصورت $\frac{0}{0}$ درمیاید

۴۴ - رفع ابهام از صور فوق - مثال ۱ - مطلوبست مقدار

حقیقی تابع $y = (x^2 - 4) \times \frac{x - 5}{x^2 - 3x + 2}$ بازاء $x = 2$

چنانکه ملاحظه میشود عبارت فوق بازاء $x = 2$ بصورت $0 \times \infty$ درمیاید

حال برای رفع ابهام عبارت فوق را مرتباً بصور ذیل مینویسیم:

$$y = \frac{(x+2)(x-2)(x-5)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-5)}{x-1}$$

که مقدار آن بازاء $x = 2$ عبارتست از ۱۲ -

مثال ۲ - مطلوبست مقدار حقیقی $y = \frac{x^2+1}{2x^2-1}$ بازاء $x = \infty$

کسر فوق بازاء $x = \infty$ بصورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمیاید حال برای رفع



ابهام صورت ومخرج کسر را بر x^2 تقسیم میکنیم تا حاصل شود :

$$y = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}}$$

که حد آن بازاء $x = \infty$ برابر میگردد با $\frac{1}{2}$

قاعده — بطور کلی برای محاسبهٔ مقدار حقیقی نسبت دو کثیرالجمله از x که اغلب بازاء $x = \infty$ بصورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمیآید قاعده آنست که صورت ومخرج کسر را بر بزرگترین قوت x که در صورت ومخرج موجود است تقسیم نمود در اینصورت سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

۱ — هرگاه درجه صورت ومخرج کسر مساوی باشد مقدار حقیقی کسر عبارت میگردد از نسبت ضرایب بزرگترین نماینده x مثلاً مقدار حقیقی $y = \frac{5x^3 - 7}{3x^3 + 1}$ بازاء $x = \infty$ عبارتست از $\frac{5}{3}$

۲ — هرگاه درجهٔ صورت از مخرج کمتر باشد مقدار حقیقی کسر صفر میگردد مثلاً مقدار حقیقی $y = \frac{x^2 - 2}{5x^3 + 1}$ بازاء $x = \infty$ عبارتست از صفر

۳ — بالاخره هرگاه درجهٔ صورت از مخرج زیادتر باشد مقدار حقیقی کسر ∞ میگردد مثلاً مقدار حقیقی کسر $y = \frac{2x^2 - 5}{x + 1}$ بازاء $x = \pm\infty$ عبارتست از

$y = \pm\infty$

مثال ۳ - مطلوبست مقدار حقیقی تابع $y = 2x - \sqrt{4x^2+x}$

بازاء $x = \infty$

چنانکه ملاحظه میشود عبارت فوق بازاء $x=\infty$ بصورت مبهم $\infty - \infty$ درمیاید

حال برای رفع ابهام عبارت مفروض را یکمرتبه در مزدوج خود ضرب و یکمرتبه بر آن

تقسیم نموده و بر وفق حالت قبل عمل میکنیم تا حاصل شود :

$$y = \frac{(2x - \sqrt{4x^2+x})(2x+\sqrt{4x^2+x})}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \frac{-x}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \frac{-1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$

که حد آن بازاء $x=\infty$ عبارتست از $y = \frac{-1}{4}$

مسائل

۶۶ - مقدار عبارات ذیل را حساب کنید :

$y = 2x - 1$ بازاء $x = \pm\infty$

$y = -3x + 4$ بازاء $x = \pm\infty$

$y = -2x^2 + 5$ بازاء $x = \pm\infty$

$y = ax^3 + 1$ بازاء $x = \pm\infty$

$y = \frac{2x-3}{x+1}$ بازاء $x = -1$ ۶۷-

$y = \frac{x+1}{x^3}$ بازاء $x = 0$



$y = \frac{2x-5}{x^3}$ بازاء $x=0$

$y = \frac{x^2-3}{x+1}$ بازاء $x=\sqrt{3}$

$y = \frac{x^2-7x+6}{x^2+5x-6}$ بازاء $x=1$ ۴۸ -

$y = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$ بازاء $x=1$

$y = \frac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}$ بازاء $x=1$

$y = \frac{2x^2+3x-2}{4x^3+16x^2-19x+5}$ بازاء $x=\frac{1}{2}$

$y = \left| \frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}} \right|$ بازاء $x=2$ ۴۹ -

$y = \frac{x+4}{x^2-16} - \frac{x+1}{x(x-4)}$ بازاء $x=4$

$y = \frac{x^3-2x}{x+1}$ بازاء $x=-1$

$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ بازاء $x=0$ ۵۰ - $= \infty$

$y = \frac{7-2x}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-4x+4}$ بازاء $x=2$

$y = \frac{2x^2+4x-1}{x-3}$ بازاء $x=\pm\infty$



(۸۵)

$$y = \frac{۵x^{۳} - ۸x^{۲} + ۳x + ۴}{۲x^{۳} - x + ۶}$$ بازاء $x = \pm\infty$

$$y = \frac{۵x^{۲} - ۸x + ۳}{۲x^{۳} - x + ۶}$$ بازاء $x = \pm\infty$

$$y = \frac{(۲x - ۳)^{۲}(۴x + ۷)^{۳}}{(۳x - ۲)^{۲}(۵x^{۲} + ۱)}$$ بازاء $x = \pm\infty$

-۷۱

$$y = ۳x - \sqrt{x^{۲} - x + ۱}$$ بازاء $x = \pm\infty$

$$y = \frac{x + ۳\sqrt{x}}{۷\sqrt{x} + ۲x}$$ بازاء $x = \pm\infty$

$$y = \sqrt{x^{۲} - ۲x - ۱} - \sqrt{x^{۲} - ۶x + ۳}$$ بازاء $x = \pm\infty$

$$y = x - ۱ + \sqrt{۴x^{۲} + x - ۲}$$ بازاء $x = \pm\infty$



خطوط مجانب

۴۵ - **تعریف** - خطی را نسبت بشاخهٔ منحنی مجانب گویند هرگاه فاصلهٔ نقطه واقعه درروی منحنی از خط میل کند بسمت صفر هرگاه نقطه درروی منحنی بینهایت دور شود

۱ - مجانب موازی $x'x$

فرض میکنیم منحنی C نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ وخط D مجانب موازی با محور $x'x$ باشد درانصورت بموجب تعریف BA میل میکند بسمت صفر هرگاه نقطه A درروی منحنی بینهایت دور شود بعبارة اخری وقتی x میل کند بسمت ∞ ولی چون

$$BA = PA - PB$$

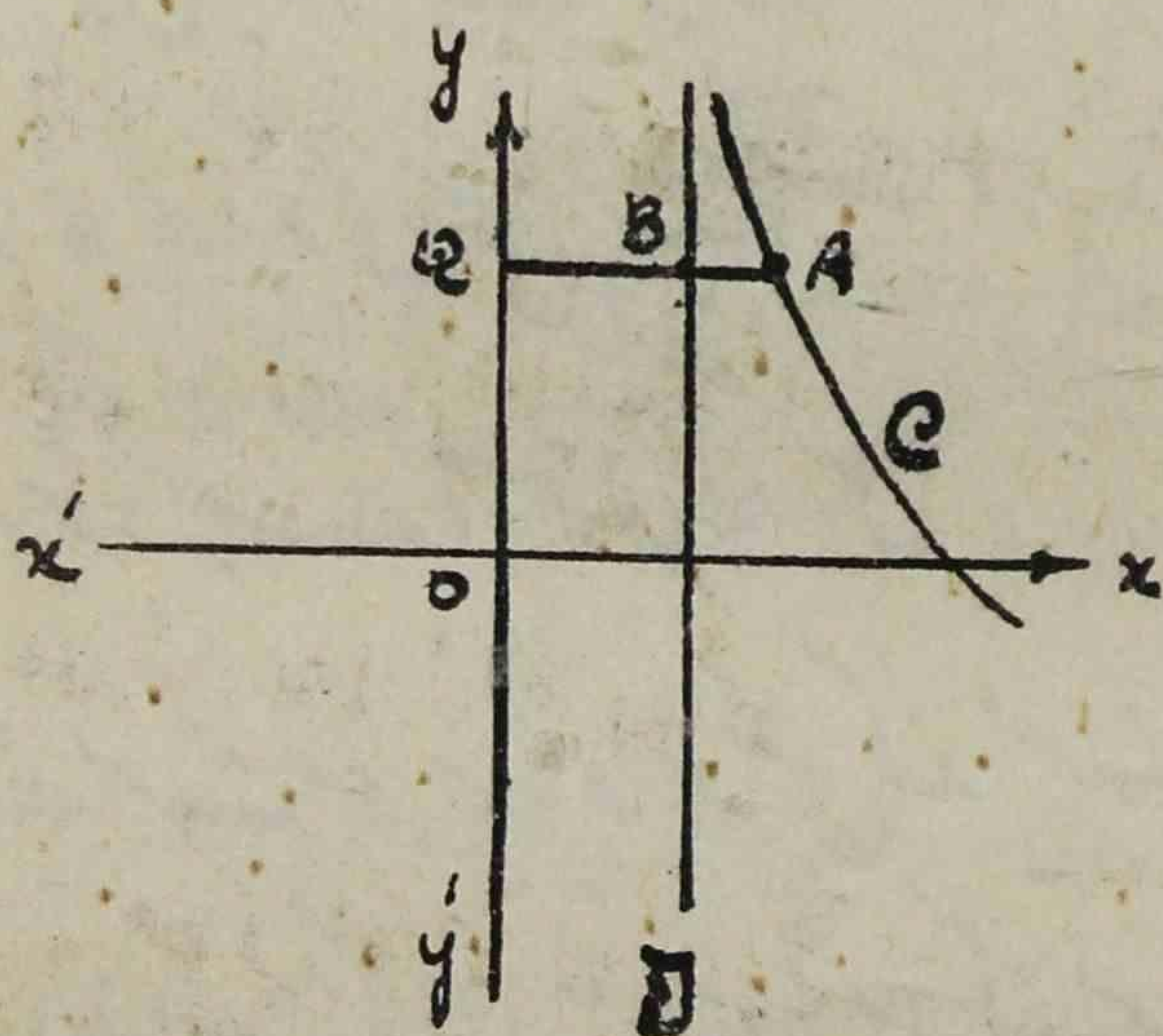
بنابراین PA میل میکند بسمت PB عرض خط مجانب هرگاه x میل کند بسمت بینهایت بنابراین اگر تابعی بازاء $x = \infty$ دارای حدی باشد آن حد عرض خط مجانب موازی با محور $x'x$ خواهد بود

مثال - درتابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ چون فرض کنیم x میل کند بسمت ∞

y میل میکند بسمت ۲ بنابراین در تابع فوق خط $y = 2$ مجانب موازی محور $x'x$ میباشد

۲- مجانب موازی $y'y$

فرض میکنیم منحنی C نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ و خط D مجانب موازی محور $y'y$ باشد درایصورت مطابق تعریف BA میل میکند بسمت صفر هرگاه نقطه A در روی منحنی بینهایت دور شود و یا آنکه عرض آن میل کند بسمت بینهایت



ولی چون ملاحظه کنیم که :

$$\overline{BA} = \overline{QA} - \overline{QB}$$

بنابراین QA یعنی طول منحنی میل میکند بسمت QB یعنی طول خط مجانب هرگاه y میل کند بسمت ∞ بطوریکه چون در تابع $y = f(x)$ بازاء $y = \infty$ ، x دارای حدی باشد آن حد طول خط مجانب موازی با محور $y'y$ میباشد

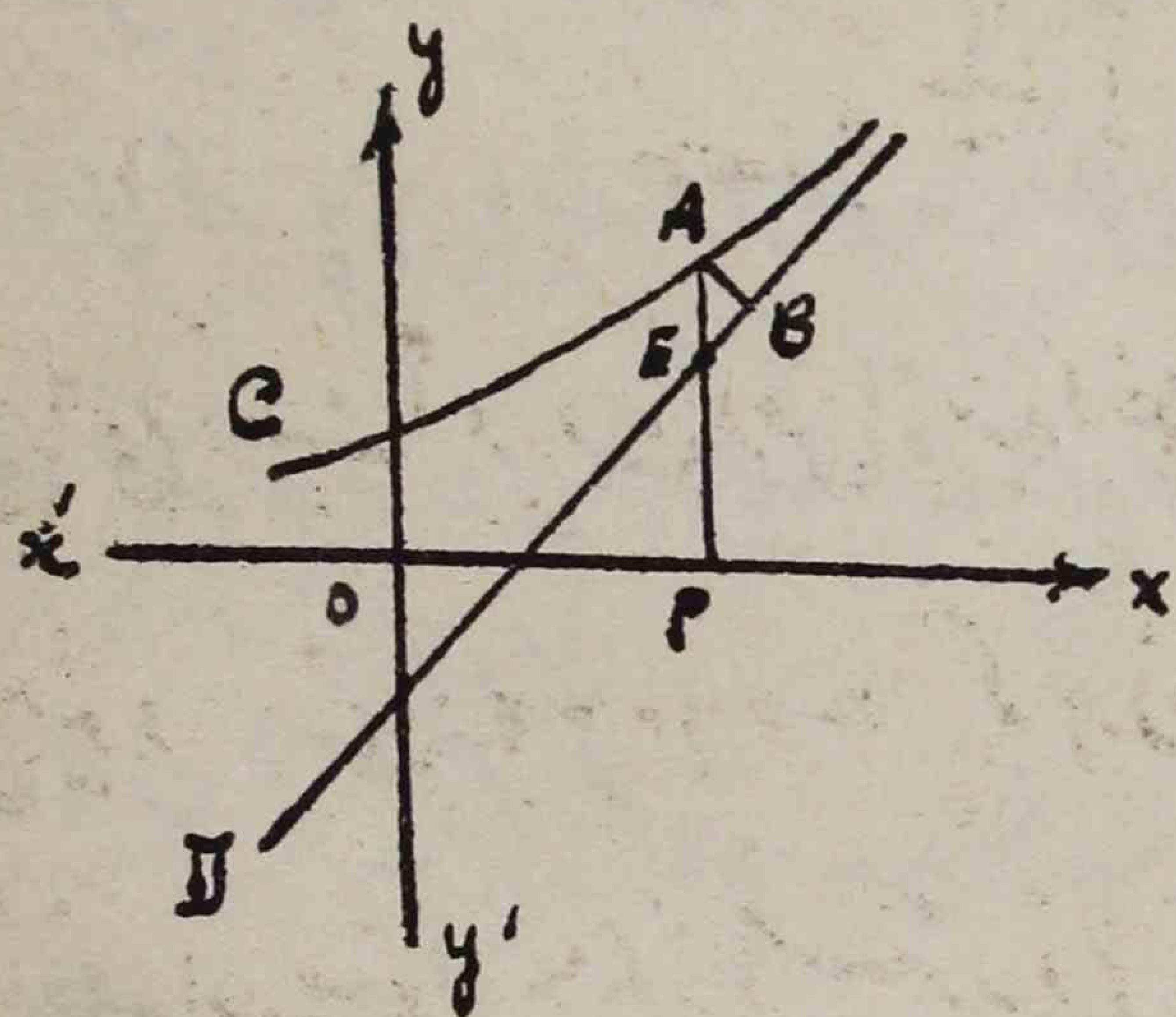
مثال- در تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ چون فرض کنیم x میل کند بسمت -1 مقدار y میل میکند بسمت ∞ بنابراین خط $x = -1$ مجانب منحنی فوق



موازی با محور $y'y$ خواهد بود

۳- مجانب غیر موازی با دو محور

فرض میکنیم منحنی C نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ و خط L بمعادلهٔ



$y_1 = mx + n$ مجانب غیر موازی

با دو محور باشد بموجب تعریف

AB میل میکند بسمت صفر هرگاه

نقطه A در روی منحنی به بینهایت

دور شود بعبارهٔ اخری AB میل

میکند بسمت صفر هرگاه x میل کند بسمت بینهایت

واضح است که چون AB میل کند بسمت صفر EA نیز میل میکند بسمت صفر

ولیکن $EA = PA - PE = y - y_1$ یعنی تفاضل عرض منحنی و خط متناظر

بیک طول میل میکند بسمت صفر وقتیکه x میل کند بسمت بینهایت

حال برای تعیین معادلهٔ خط مجانب $y_1 = mx + n$

بنابر آنچه گفتیم ملاحظه میشود که $y - (mx + n)$ میل میکند بسمت صفر هرگاه

x میل کند بسمت بینهایت لذا چون تفاضل فوق را مساوی ε قرار دهیم

حاصل میشود $y-(mx+n)=\varepsilon$

وازآنجا $m=\frac{y}{x}-\frac{n}{x}-\frac{\varepsilon}{x}$ وچون فرض کنیم x میل کند بسمت ∞ دو جمله اخیر میل میکند بسمت صفر و مقدار m یا ضریب زاویه خط مجانب ازروی دستور ذیل حساب میشود :

$$m=\lim\left|\frac{y}{x}\right|_{x\to\infty}$$

همچنین برای بدست آوردن عرض از مبدأ خط مجانب ازرابطه $y-(mx+n)=\varepsilon$ حاصل میشود $n=y-mx-\varepsilon$ که چون x میل کند بسمت ∞ حد ε صفر و بنابراین مقدار n از دستور ذیل بدست میآید :

$$n=\lim\left|y-mx\right|_{x\to\infty}$$

مثال - مطلوبست معادله خط مجانب غیرموازی با دو محور در تابع $y=\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ بروفق آنچه گفتیم حاصل میشود :

$$m=\lim\left|\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}\right|_{x\to\infty}=\lim\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\right|_{x\to\infty}=1$$

وهمچنین :

$$n=\lim\left|\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}-x\right|_{x\to\infty}$$



وچون عبارت اخیر بازاء $x = \infty$ بصورت مبهم درمیآید لذا برای رفع ابهام آنرا مرتباً بصور ذیل تبدیل میکنیم :

$$y = \frac{x\sqrt{x+1} - x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} =$$

$$\frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 2} = \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x}}$$

که حدّ آن بازاء $x = \infty$ عبارتست از $\frac{3}{2}$ بنابراین معادله خط مجانب غیرموازی با دو محور در تابع مفروض عبارت میگردد $y_1 = x + \frac{3}{2}$

۴۶ – بطور کلّی در توابعی که بصورت $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ باشند هرگاه فرض کنیم درجه صورت m و درجهٔ مخرج n و خارج قسمت صورت بر مخرج $Q(x)$ وباقیمانده $R(x)$ باشد تابع رامیتوان بصورت ذیل نوشت :

$y = Q(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)}$ وچون فرض کنیم $y_1 = Q(x)$ باشد این معادله مجانب منحنی فوق میباشد زیرا تفاضل :

$$y - y_1 = Q(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)} - Q(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

میل میکند بسمت صفر هرگاه x میل کند بسمت ∞

حال از مقایسه درجهٔ صورت و مخرج تابع مفروض دو حالت ذیل تشخیص داده میشود:

اولاً $m \leq n+1$ درایصورت $Q(x)$ اکثراً از درجهٔ اول بوده و خط

$y_1 = Q(x)$ مجانب مستقیم میباشد

ثانیاً $m > n+1$ درایصورت $Q(x)$ اقلاً از درجهٔ دوم و $y_1 = Q(x)$

مجانب منحنی تابع مفروض میباشد

مثال ۱ــ مطلوبست معادلهٔ خط مجانب غیر موازی با دو محور در تابع

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارت میگردد از $x-1$ بنابراین

خط $y_1 = x-1$ مجانب منحنی میباشد

مثال ۲ــ مطلوبست معادله مجانب منحنی تابع $y = \frac{x^3}{x-1}$

چون صورت را بر مخرج تقسیم میکنیم خارج قسمت عبارت خواهد بود از

x^2+x+1 بنابراین منحنی $y_1 = x^2+x+1$ مجانب منحنی تابع

مفروض میباشد

مسائل

۲۰ــ معادلات مجانب منحنی‌های ذیل را معلوم کنید : ✓



$$y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{1}{x+2} \qquad y = \frac{x-3}{2x+5}$$

$y=\dfrac{x^2+1}{x}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x^2}{1-x+x^2}$

$y=\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$ $\qquad$ $y=\dfrac{(2x-1)^2}{x^2+3x-4}$ $\qquad$ $y=\dfrac{(x-1)^2}{(2x-4)^2}$

$y=\dfrac{-x}{(x-1)(2x+1)}$ $\qquad$ $y=\dfrac{(x-3)^2(x+1)}{2x^2(x-1)}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x^4}{(x^2-1)(x^2-4)}$

−۷۳

$y=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad$ $y=x\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$ $\qquad$ $y=x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

$y=\dfrac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ $\qquad$ $y=\sqrt{\dfrac{ax+b}{a'x+b'}}$ $\qquad$ $y=\dfrac{3}{2\sqrt{9-x^2}}$

−۷۴

$y=\dfrac{x^3}{1-x}$ $\qquad$ $y=\dfrac{(x^2-1)^2}{x+2}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x^3(x+1)^2}{x^2+x-2}$

$y=\dfrac{(x+1)^3(x-1)^2}{x}$ $\qquad$ $y=a^2+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}$ $\qquad$ $y=x^2-1+\dfrac{1}{x}$



اقسام تابع

۴۷ - **تابع معیّن** - تابع $y=f(x)$ را بازاء $x=x_1$ معیّن گویند هرگاه بجای x در تابع x_1 را قرار دهیم مقدار معیّنی برای y بدست آید مثلاً تابع $y=2x-1$ بازاء جمیع مقادیر x معیّن میباشد برخلاف تابع $y=\sqrt{x}$ که بازاء مقادیر مثبت x دارای مقدار میباشد فقط بازاء مقادیر $x \geq 0$ معین میباشد

۴۸ - **تابع اتّصالی و تابع انفصالی** - تابعی در فاصلهٔ* a و b اتّصالی است هرگاه به x هر مقدار در فاصلهٔ a و b قرار دهیم برای y مقدار مشخّصی بدست آید مثلاً تابع $y=2x-5$ و $y=\sin x$ بازاء جمیع مقادیر x اتّصالی میباشند برخلاف تابع $y=\frac{x-1}{x-2}$ بازاء $x=2$ و همچنین تابع $y=\operatorname{tg} x$ بازاء قوسهای $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ انفصالی و مقدار y نظیر آنها عبارتست از $\pm\infty$

۴۹ - **تابع صعودی و نزولی** - هرگاه در تابع $y=f(x)$ جهت تغییرات x و y یکی باشد تابع را صعودی والاّ نزولی گویند مثلاً تابع $y=2x-1$

---

* مقصود از فاصله a و b کلیه اعداد مفروضه مابین a و b میباشد که خود a و b را هم شامل خواهد بود



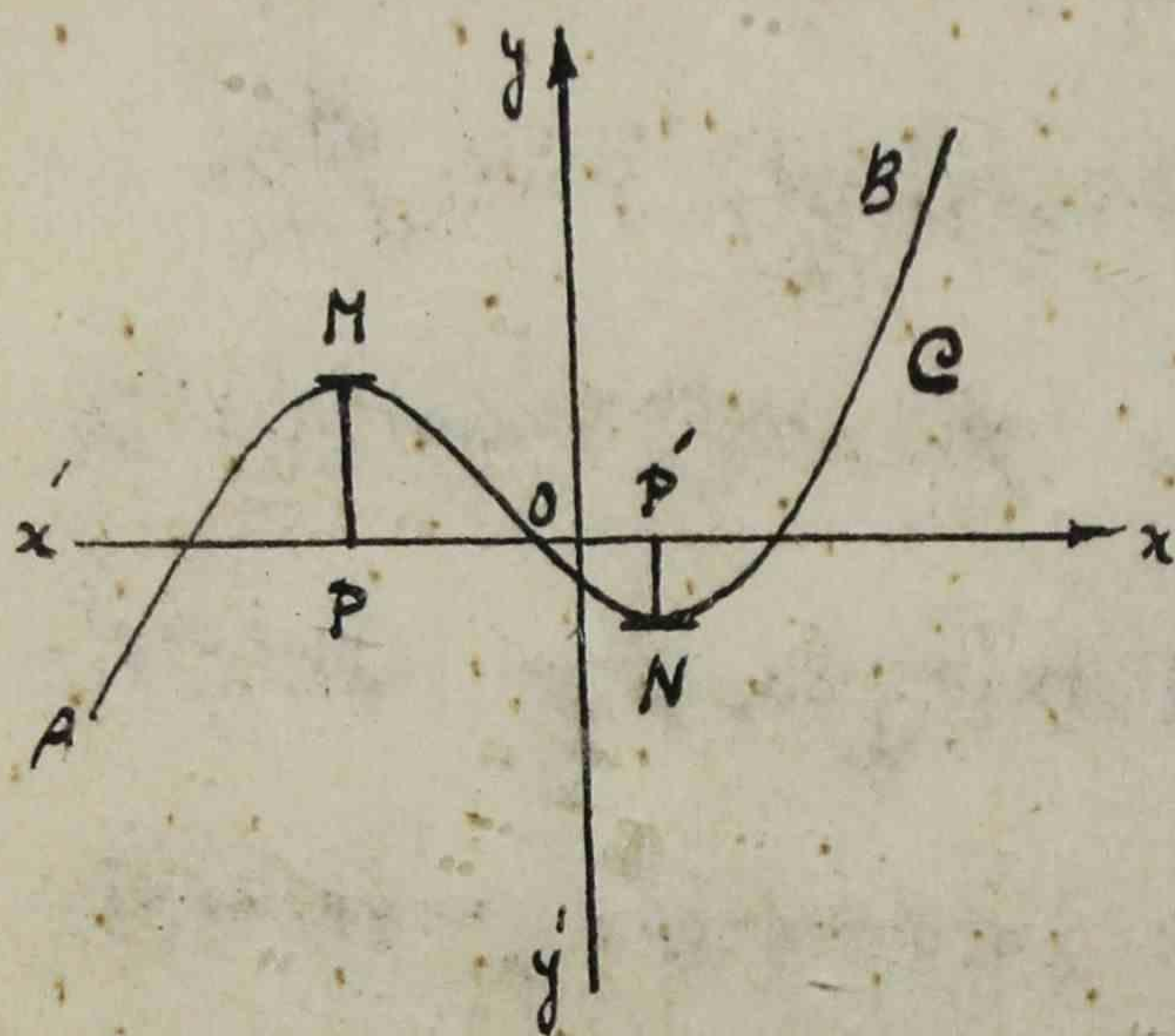
همیشه صعودی است چه اگر x را از مقدار اولی مفروض ترقی دهیم مقدار نظیر آن نیز ترقی میکند و اگر تنزّل دهیم مقدار نظیر y آن نیز تنزل مینماید برخلاف تابع $y = 1 - 2x$ همیشه نزولی است چه اگر x ترقی کند مقدار y نظیر تنزل مینماید و اگر x تنزّل کند مقدار y نظیر ترقی مینماید

تابع ممکن است بازاء جمیع مقادیر x صعودی یا نزولی باشد مثلاً تابع $y = 2x + 1$ بازاء جمیع مقادیر x صعودی و تابع $y = 1 - 2x$ بازاء جمیع مقادیر x نزولی است ولی اغلب تابع در فاصلهٔ معینی صعودی و در فاصلهٔ معین دیگر نزولی میباشد مثلاً تابع $y = x^2 - 4x + 3$ بازاء مقادیر $x < 2$ نزولی و بازاء مقادیر $x > 2$ صعودی میباشد

۵۰ — **ماکزیمم و مینیموم** — میگویند تابع $y = f(x)$ بازاء $x = x_0$ ماکزیموم است هرگاه تابع بازاء مقادیر کمی کوچکتر از آن صعودی بوده و بازاء $x = x_0$ نزولی گردد همچنین میگویند تابع $y = f(x)$ بازاء $x = x_0$ مینیموم است هرگاه تابع بازاء مقادیر کمی کوچکتر از آن نزولی بوده و بازاء $x = x_0$ صعودی میگردد

همواره ممکن است از روی معادله تابعی تحقیق نمود که تابع در چه فاصله صعودی

ودرچه فاصله نزولی و بازاء چه مقادیر x ماکزیم یا منیم است بالعکس میتوان از روی منحنی نمایش تغییرات تابع نیز مطالب فوق را تحقیق نمود مثلاً منحنی C



نمایش تغییرات تابعی است که در شاخه AM صعودی و در شاخه MN نزولی و در شاخه NB مجدداً صعودی میباشد و بنابراین بر وفق تعریف در نقطه M بازاء $x = OP$ دارای ماکزیمومی مساوی PM و در نقطه N بازاء $x = OP'$ دارای مینیمومی مساوی $P'N$ باشد

مشتقات

۵۱- نمو - هرگاه در تابع $y = f(x)$ ابتدا برای x مقدار اولی مانند $x_1 = a$ فرض نموده و $y_1 = f(a)$ نظیر این مقدار را برای y حساب کنیم و بعد برای x مقدار ثانوی مانند $x_2 = b$ فرض نموده و $y_2 = f(b)$ نظیر این مقدار x را نیز برای y حساب کنیم میگویند برای x نموی حاصل شده است مساوی مقدار ثانوی منهای مقدار

اولی و یا $b-a$ و برای y نیز که تابع آنست نموی حاصل شده است برابر با $f(b)-f(a)$ که عموماً آنها را به Δx و Δy نمایش میدهند بنابراین:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = b - a$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(b) - f(a)$$

۵۲ - تعریف مشتق - هرگاه فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ a و b اتصالی بوده و x_0 مقدار اولی x در فاصلهٔ a و b باشد چون به $x = x_0$ نموی مانند Δx داده و نمو نظیرش را برای تابع Δy فرض کنیم حد نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را هرگاه Δx میل کند بسمت صفر مشتق تابع $y = f(x)$ بازاء مقدار اولی x یعنی x_0 مینامند بنابراین مشتق هر تابع بازاء مقدار معینی از x عبارتست از حد نسبت نمو تابع بنمو نظیر متغیر هرگاه نمو متغیر میل کند بسمت صفر و آنرا عموماً بصورت ذیل مینویسند

$$\lim \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x \to 0}$$

قاعده - بطور کلی بر وفق تعریف فوق قاعدهٔ ذیل برای محاسبهٔ مشتق توابع بدست میاید :

۱- مقداری از x را که مقصود محاسبهٔ مشتق تابع بازاء آنست مقدار اولی

x قرار میدهیم و مقدار اولی تابع را نظیر آن حساب میکنیم

۲ - به x نموی مانند Δx میدهیم و Δy یعنی نمو نظیر آنرا برای تابع تعیین مینمائیم

۳ - نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل داده آنرا ساده میکنیم

۴ - حد نسبت فوق را هرگاه Δx میل کند بسمت صفر حساب میکنیم این حد مشتق تابع خواهد بود

اینک برای نمونه مثال ذیل را حل میکنیم :

مثال - مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع $y = x^2$ بازاءِ $x = 3$ و $x = 1$

بروفق قاعدهٔ فوق مرتباً میتوان نوشت :

مشتق بازاءِ $x = 3$

$$x_1 = 3 \qquad\qquad y_1 = 9$$

$$x_2 = 3 + h \qquad\qquad y_2 = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h \qquad\qquad \Delta y = y_2 - y_1 = 6h + h^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

$$\lim \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0} = 6$$



مشتق بازاء $x = -1$

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = -1 + h$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = (-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 = -2h + h^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2h + h^2}{h} = -2 + h$$

$$\lim \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{\Delta x \to 0} = -2$$

بنابراین مشتق تابع $y = x^2$ بازاء $x = 3$ عبارتست از ۶ و بازاء $x = -1$ عبارتست از ۲-.

بطوریکه ملاحظه میشود مشتق تابع $y = f(x)$ عموماً تابع دیگریست از x که آنرا بیکی از صور ذیل نمایش میدهند $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

حال برای بدست آوردن معادله کلی مشتق تابع $y = x^2$ کافیست که مقدار اولی x را همان x فرض نموده بترتیب فوق عمل نمائیم تا حاصل شود:

مشتق بازاء $x = x$

$$x_1 = x$$
$$x_2 = x + h$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$

$$y_1 = x^2$$
$$y_2 = (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 = 2hx + h^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + h \qquad \text{منتها} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{\Delta x \to 0} = 2x$$

بطوریکه مشتق تابع $y = x^2$ عبارتست از $y' = 2x$ که در آن

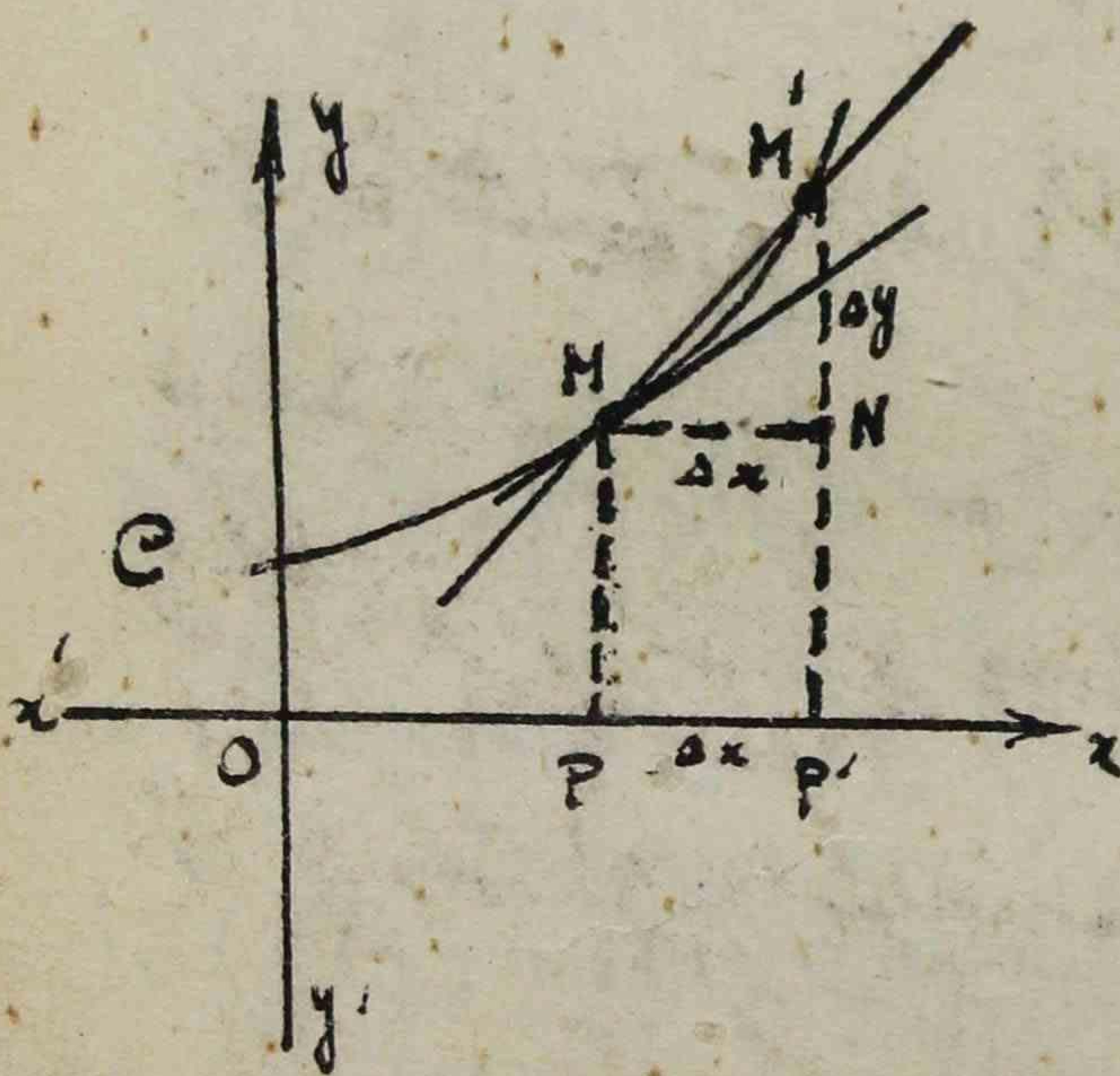
چون بجای x هر مقداری را قرار دهیم مشتق تابع بازاء همان مقدار بدست آید.

تعبیر هندسی مشتق

۵۳ - تابع $y = f(x)$ و منحنی C نمایش تغییرات آنرا اختیار نموده و

در روی آن نقطه $M(x, y)$ را فرض میکنیم بنابراین $\overline{OP} = x$ و

$\overline{PM} = y$ خواهد بود



حال اگر بنا بتعریف مشتق به x

نموی مانند $\overline{PP'} = \Delta x$ بدهیم

برای y نیز نموئی حاصل میشود

برابر با $\overline{P'M'} - \overline{PM} = \overline{NM'} = \Delta y$

بطوریکه نقطه جدیدی مانند M'

در روی منحنی بدست میآید بمختصات $(x + \Delta x , y + \Delta y)$ حال چون Δy را

به Δx نسبت دهیم حاصل میشود $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\overline{M'N}}{\overline{MN}} = \operatorname{tg} \widehat{M'MN}$

بنابراین تعبیر هندسی نسبت فوق عبارتست از ضریب زاویه خط قاطع $M'M$ حال

اگر فرض کنیم Δx میل کند بسمت صفر نقطه P' میل میکند بسمت P و M'

نیز در روی منحنی میل میکند بسمت M و قاطع MM' در حول نقطه M دوران مینماید تا وقتیکه Δx بحد خود صفر برسد قاطع MM' بوضع مماس در نقطه M قرار میگیرد و چون نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همواره ضریب زاویه قاطع MM' میباشد لذا حد آن که بنا بتعریف مشتق تابع بازاء طول نقطه M میباشد ضریب زاویهٔ حد قاطع MM' و یا مماس بر نقطه M خواهد بود بطوریکه مشتق تابع را بازاء مقدار معینی از x میتوان بتعبیر بضریب زاویه مماس بر نقطه از منحنی بطول x نمود

مورد استعمال - مطلوبست معادله خطی که از نقطه $x=3$ واقعه بر منحنی $y=x^2$ بر آن مماس گردد

نقطه مفروضه چون در روی منحنی است لذا مختصات آن عبارت خواهد بود از (۹ و ۳) و بنا بر آنچه میدانیم صورت کلی خطوط مار بر این نقطه عبارتست از $y-9=m(x-3)$ و چون بجای m مشتق تابع را بازاء $x=3$ که عبارتست از ۶ قرار دهیم حاصل میشود $y-9=6(x-3)$

و یا $y=6x-9$

محاسبهٔ مشتق

۵۴ - مشتق مقدار ثابت - مشتق مقدار ثابت مساویست با صفر

چه هرگاه فرض کنیم $y = c$ باشد چون ضریب x مساوی صفر است بنابراین بازاء هر مقدار Δx مقدار Δy نظیر مساوی صفر بوده

ولذا نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ و حدّ آن نیز صفر میباشد

۵۵- مشتق $y = x$ - مشتق $y = x$ عبارتست از $y' = 1$ زیرا چون بر طبق تعریف مشتق عمل کنیم حاصل میشود :

$$x_1 = x \qquad\qquad y_1 = x$$

$$x_2 = x + h \qquad\qquad y_2 = x + h$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h \qquad\qquad \Delta y = y_2 - y_1 = h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0} = y' = 1$$

۵۶- مشتق $y = x^m$ - مشتق $y = x^m$ عبارتست از $y' = mx^{m-1}$ زیرا بنا بتعریف مشتق :

$$x_1 = x \qquad\qquad y_1 = x^m$$

$$x_2 = x + h \qquad\qquad y_2 = (x+h)^m$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h \qquad\qquad \Delta y = y_2 - y_1 = (x+h)^m - x^m =$$

$$(x+h-x)\left[(x+h)^{m-1}+x(x+h)^{m-2}+\cdots\cdots+x^{m-1}\right]=$$

$$h\left[(x+h)^{m-1}+x(x+h)^{m-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{m-1}\right]=$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(x+h)^{m-1}+x(x+h)^{m-2}+\cdots\cdots+x^{m-1}$$

$$\lim\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0}=y'=x^{m-1}+x^{m-1}+\cdots+x^{m-1}=mx^{m-1}$$

مثال :- بنابر دستور فوق مشتق $y = x^2$ عبارتست از $y' = 2x$
و مشتق $y = x^3$ عبارتست از $y' = 3x^2$ و همچنین مشتق $y = x^4$
عبارتست از $y' = 4x^3$

۵۷ - مشتق مجموع چندین تابع - هرگاه فرض کنیم z و u و v
هریک تابعی از x باشند و $y = z+u+v$ باشد $y' = z'+u'+v'$
خواهد بود

زیرا اگر به x نموی مانند Δx بدهیم برای z و u و v و y که هریک
تابعی از x میباشند نموی حاصل میشود برابر با Δz و Δu و Δv و Δy
بطوریکه میتوان مرتباً نوشت :

$$\begin{array}{ll} x_1 = x & y_1 = z+u+v \\ x_2 = x+\Delta x & y_2 = (z+\Delta z)+(u+\Delta u)+(v+\Delta v) \\ \hline x_2 - x_1 = \Delta x & y_2 - y_1 = \Delta y = \Delta z+\Delta u+\Delta v \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{\Delta x \to 0} = y' = z' + u' + v'$$

همچنین است اثبات حکم برای چندین تابع

مثال - مطلوبست صورت کلی مشتق تابع $y = x^4 + x^3 + x - 1$

بنابرآنچه گفتیم مشتق تابع فوق عبارت میگردد از $y' = 4x^3 + 3x^2 + 1$

۵۸- مشتق حاصل ضرب دو تابع - مشتق $y = u \times v$

عبارتست از $y' = vu' + uv'$

زیرا چون بر طبق تعریف مشتق عمل کنیم حاصل میشود :

$$\begin{array}{ll} x_1 = x & y_1 = u \times v \\ x_2 = x + \Delta x & y_2 = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \\ \hline x_2 - x_1 = \Delta x & y_2 - y_1 = \Delta y = v \times \Delta u + u \times \Delta v + \Delta u \times \Delta v \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \times \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \times \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \times \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{\Delta x \to 0} = y' = vu' + uv'$$

مثال - مشتق $y = x^2(x+1)$ عبارتست از :



$y' = 2x(x+1) + x^2 = 3x^2 + 2x$

۵۹- **مشتق حاصل ضرب تابعی در مقدار ثابت** - فرض میکنیم a مقدار ثابت و u تابعی از x و $y = au$ باشد در اینصورت مشتق y بحسب متغیر x عبارتست از $y' = au'$

زیرا چون از تابع $y = au$ برطبق دستور فوق مشتق استخراج کنیم حاصل میشود: $y' = au' + ua'$

و چون a' صفراست لذا حاصل میشود $y' = au'$

مثال - برطبق دستور فوق مشتق $y = 2x$ عبارتست از $y' = 2$ و مشتق $y = -3x^2$ عبارتست از $y' = -6x$ و مشتق $y = \frac{1}{2}x^5$ عبارتست از $y' = \frac{5}{2}x^4$ و مشتق $y = ax^2 + bx + c$ عبارتست از $y' = 2ax + b$

۶۰- **مشتق حاصل ضرب سه تابع** - فرض میکنیم $y = z \times u \times v$ باشد حال اگر $u \times v$ را یک جمله فرض نموده از عبارت فوق مشتق استخراج کنیم حاصل میشود:

$$y' = z' \times u \times v + (u \times v)' \times z$$

وچون بجای $(u \times v)'$ مقدار آنرا قرار دهیم نتیجه میشود :

$$y' = z' \times u \times v + u' \times z \times v + v' \times z \times u$$

مثال - مشتق $y = 2x^2(3x-1)(x^3+1)$ عبارتست از

$$y' = 4x(3x-1)(x^3+1) + 6x^2(x^3+1) + 6x^4(3x-1)$$

۶۱- **مشتق حاصل ضرب چندین تابع** - چون بطریقی مشابه بافوق عمل کنیم نتیجه میشود :

مشتق حاصل ضرب چندین تابع برابراست با مجموع حاصل ضربهای مشتق هریک از آنها درحاصل ضرب توابع دیگر

۶۲- **مشتق نسبت دو تابع** - مشتق $y = \frac{u}{v}$ عبارتست از

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

زیراچون برطبق تعریف مشتق عمل کنیم حاصل میشود :

$$x_1 = x \qquad y_1 = \frac{u}{v}$$

$$x_2 = x + \Delta x \qquad y_2 = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x \qquad y_2 - y_1 = \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \times \Delta u - u \times \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \times \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \times \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$



$$\lim \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{\Delta x \to 0} = y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

مثال - مشتق $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ بروفق دستور فوق عبارت خواهد بود از

$$y' = \frac{a(a'x+b') - a'(ax+b)}{(a'x+b')^2} = \frac{ab' - ba'}{(a'x+b')^2}$$

تبصره - مشتق $y = \frac{a}{v}$ که در آن a مقداریست ثابت عبارتست از $y' = \frac{-av'}{v^2}$ زیرا مطابق دستور فوق چون مشتق $y = \frac{a}{v}$ را حساب کنیم حاصل میشود:

$$y' = \frac{va' - av'}{v^2} = \frac{-av'}{v^2}$$

مثال - مشتق $y = \frac{1}{x}$ عبارت میگردد از $y' = \frac{-1}{x^2}$

۴۳ - مشتق قوه یک تابع - مشتق $y = u^m$ عبارتست از

$$y' = mu' \times u^{m-1}$$

حالت اول - فرض میکنیم m عدد صحیح و مثبتی باشد دراینصورت y را میتوان بصورت ذیل نوشت:

$$y = \overbrace{u \times u \times u \times \cdots\cdots \times u}^{m\ \text{مرتبه}}$$

که چون از آن مطابق دستور سابق مشتق استخراج کنیم حاصل میشود:

$$y' = \overbrace{u' \times u^{m-1} + u' \times u^{m-1} + \dots + u' \times u^{m-1}}^{m\ \text{مرتبه}} = m u' \times u^{m-1}$$

حالت دوم - فرض میکنیم m عدد صحیح و منفی باشد در اینصورت هرگاه

$m = -m'$ باشد حاصل میشود $y = u^m = u^{-m'} = \frac{1}{u^{m'}}$

که چون از آن مشتق استخراج کنیم نتیجه میشود،

$$y' = \frac{-m' \times u' \times u^{m'-1}}{u^{2m'}} = -m' \times u' \times u^{-m'-1} = m u' \times u^{m-1}$$

حالت سوم - فرض میکنیم m عدد کسری مثبت یا منفی و مثلاً مساوی $\frac{p}{q}$

باشد در اینصورت تابع را میتوان بصورت ذیل نوشت $y = u^m = u^{\frac{p}{q}}$

و از آنجا $y^q = u^p$ که چون از طرفین مشتق استخراج کنیم حاصل میشود:

$$q \times y' \times y^{q-1} = p \times u' \times u^{p-1}$$

و از آنجا $y' = \frac{p u' \times u^{p-1}}{q \times y^{q-1}} = \frac{p u' \times u^{p-1}}{q \times u^{\frac{p}{q}(q-1)}} =$

$$\frac{p}{q} u' \times u^{\frac{p}{q}-1} = m u' \times u^{m-1}$$

مثال - مشتق $y = (x^2-1)^3$ با بدستور فوق عبارت خواهد بود

از: $y' = 6x(x^2-1)^2$

۶۴ - مشتق ریشه یک تابع - مشتق $y = \sqrt[m]{u}$



عبارتست از
$$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$$
زیرا میتوان نوشت :
$$y = \sqrt[m]{u} = u^{\frac{1}{m}}$$
که چون بروفق دستور سابق مشتق آنرا حساب کنیم حاصل میشود :
$$y' = \frac{1}{m} \times u' \times u^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m} \times u' \times u^{\frac{-(m-1)}{m}} = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

مثال - مشتق $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$ عبارتست از :
$$y' = \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$$

حالت مخصوص - بروفق دستور فوق مشتق $y = \sqrt{u}$ عبارت میگردد از
$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال - مشتق $y = \sqrt{x}$ عبارتست از $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

۶۵ - **مشتق تابع تابع** - فرض میکنیم $y = f(u)$ و $u = \varphi(x)$ باشد دراینصورت y را نسبت بمتغیر x تابع تابع گویند چه y تابعی از u و u تابعی است از x

حال اگر بخواهیم مشتق y را نسبت بمتغیر x حساب کنیم ملاحظه میکنیم که نظیر Δx نمو x برای u نموی مانند Δu و برای y نیز نموی مانند Δy حاصل میشود ولی همواره میتوان نوشت :
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

که چون در آن فرض کنیم Δx میل کند بسمت صفر حاصل میشود :

$$y'_x = y'_u \times u'_x \quad \text{و یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال - فرض میکنیم $u = \sqrt{x^2+1}$ و $y = u^3$ باشد در اینصورت مشتق y بحسب متغیر x عبارت میگردد از :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = 3x\sqrt{x^2+1}$$

۴۶ - **مشتقات متوالی یک تابع** - هرگاه مشتق تابع $y = f(x)$ را حساب کنیم حاصل میشود $y' = f'(x)$ که آنرا مشتق اول تابع گویند حال اگر از مشتق فوق نیز که عموماً تابعی است از x مجدداً مشتق استخراج کنیم حاصل میشود $y'' = f''(x)$ که آنرا مشتق ثانی تابع مفروض مینامند همینطور است مشتق سوم و چهارم

مشتق اول تابع y را بصورت $\frac{dy}{dx}$ و مشتق ثانی را بصورت $\frac{d^2y}{dx^2}$ و مشتق سوم را بصورت $\frac{d^3y}{dx^3}$ مینویسند وقس علیهذا

مثال - مشتقات متوالی $y = (x-1)^3$ مرتباً عبارتست از :

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3(x-1)^2 \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-1)$$

$$= \frac{d^3y}{dx^3} = 6 \qquad y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$



۴۷ ـ مشتق تابعی که نسبت به x حل نشده است ـ فرض میکنیم تابعی

بصورت $x^2+y^2-4xy+y-1=0$ باشد در اینصورت

برای محاسبه مشتق y بحسب متغیر x از طرفین رابطه فوق مشتق حساب میکنیم

تا حاصل شود:

$$2x+2y\times\frac{dy}{dx}-4x\times\frac{dy}{dx}-4y+\frac{dy}{dx}=0$$

که چون $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنیم حاصل میشود:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{4y-2x}{2y-4x+1}$$

dy = differanciel y

مورد استعمال مشتق در محاسبه مقدار حقیقی بعضی عبارات

۴۸ ـ **قضیه** ـ مقدار حقیقی کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ که بازاء $x=a$ بصورت

$\frac{0}{0}$ میباشد برابر است با مقدار کسر $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ بازاء $x=a$

چون $f(a)$ و $\varphi(a)$ حاوی صفر میباشند بنابراین نسبت

فوق را میتوان مرتباً بصور ذیل نوشت:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}$$



حال اگر فرض کنیم x میل کند بسمت a صورت و مخرج کسر فوق میل میکند بسمت $f'(a)$ و $\varphi'(a)$ یعنی مشتق صورت و مخرج کسر و چون $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ همواره با کسر فوق مساویست لذا در حدّ نیز با یکدیگر مساوی خواهند بود

مثال — مطلوبست محاسبهٔ مقدار حقیقی کسر $\frac{x^2-5x+4}{2x^2-3x+1}$ بازاء $x=1$

چون مشتق صورت و مخرج کسر فوق را حساب نموده بیکدیگر نسبت دهیم حاصل میشود $\frac{2x-5}{4x-3}$ که مقدار آن بازاء $x=1$ برابر است با -3

مسائل

۷۵ — مشتق توابع ذیل را بطور مستقیم و از روی تعریف مشتق حساب کنید

$y=-2x+1$ بازاء $x=3\,,\ 0\,,\ a$

$y=\frac{x}{1-x}$ بازاء $x=-1\,,\ \sqrt{2}\,,\ \frac{1}{3}$

$y=\frac{(x-1)^2}{x}$ بازاء $x=\frac{1}{3}\,,\ 1+\sqrt{2}\,,\ a-1$

۷۶ —

$y=\sqrt{x}$ بازاء $x=4\,,\ \frac{1}{9}\,,\ \frac{1}{2}$

$y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ بازاء $x=a^2\,,\ -a\,,\ \frac{a}{2}$

$y=\frac{x-a}{(x+a)^2}$ بازاء $x=1+a\,,\ \sqrt{a}$

$y=\frac{x(x-a)^2}{a}$ بازاء $x=0\,,\ a\,,\ 2a$

۲۷- مشتق توابع ذیل را حساب کنید :

$y = x^3 + x^2 - 2x$ $\qquad$ $y = x^4 - 2x^2 + 1$

$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ $\qquad$ $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{3}$

$y = (1+x)(1-x)$ $\qquad$ $y = (1+x)(1-x)(1+2x)(1-2x)$

$y = (x-3)^4$ $\qquad$ $y = x(2x-1)^3$ -۲۸

$y = x^2(1+x)^3(2-x)^2$ $\qquad$ $y = (x+1)^3(x-1)^3(x^2+1)$

$y = \frac{x(x^2-1)^2}{3} - \frac{1}{x}$ $\qquad$ $y = (a-x)(a+x)$

$y = (a-b)x^2 - ax + b$ $\qquad$ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $y = \frac{a-x}{x}$ $\qquad$ $y = \frac{x-2}{x+2}$ -۲۹

$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ $\qquad$ $y = \frac{x+1}{x^2}$ $\qquad$ $y = \frac{x^2}{x-5}$

$y = \frac{(x-3)^2}{(x+2)^2}$ $\qquad$ $y = \frac{x(ax+b)^2}{ax-b}$ $\qquad$ $y = \frac{x^2-4x^4}{5-x^2}$

$y = \frac{x^2-9}{x^2+12x+11}$ $\qquad$ $y = \frac{2x+1}{4x^2+4x-1}$ $\qquad$ $y = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}$

$y = x + \sqrt{1+x^2}$ $\qquad$ $y = x - \sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ -۳۰

$y = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} - x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ $\qquad$ $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$

$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ $\qquad$ $y = \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad$ $y = \sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}$ $\qquad$ $y = \sqrt{\frac{3x^2+6}{x^2+6x+9}}$

۸۱ -

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$y = x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$y = \sqrt{\frac{x(2-x)}{x^2-4x+3}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$y = \sqrt{\frac{x(x-1)^3}{x+1}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2+a} + x}{\sqrt{x^2+a} - x} + \frac{\sqrt{x^2+a} - x}{\sqrt{x^2+a} + x}$$

۸۲ - مطلوبست محاسبهٔ مقدار حقیقی کسرهای ذیل از راه استعمال مشتق

$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$ بازاء $x=1$

$\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$ بازاء $x=5$

$\dfrac{8x^3+4x^2-6x+1}{8x^3+10x^2-11x+2}$ بازاء $x=\frac{1}{2}$

$\dfrac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^4-2x^3+x^2}$ بازاء $x=1$



موارد استعمال مشتق در تعیین ماکزیمم و مینیموم توابع

۵۹ - **قضیه - مشتق تابع صعودی مثبت و مشتق تابع نزولی منفی است**

اولاً هرگاه فرض کنیم تابع $y = f(x)$ بازاء مقداری از x صعودی باشد مشتق آن بازاء این مقدار x مثبت میباشد چه بنا بتعریف تابع صعودی نظیر Δx مثبت Δy مثبت و نظیر Δx منفی Δy منفی خواهد بود بطوریکه نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همواره مثبت و حدّ آن نیز که مشتق تابع است مثبت میباشد

ثانیاً هرگاه فرض کنیم تابع $y = f(x)$ بازاء مقداری از x نزولی باشد مشتق تابع بازاء این مقدار x منفی میباشد زیرا بنا بتعریف تابع نزولی نظیر Δx مثبت Δy منفی و نظیر Δx منفی Δy مثبت میباشد بطوریکه نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همواره منفی و حدّ آن نیز که مشتق تابع است منفی میباشد

تبصره - با ملاحظه آنچه که راجع بتعبیر هندسی مشتق بیان نمودیم نتیجه میشود که زاویه حادثه مابین مماس بر نقطه از منحنی در شاخه صعودی با جهت مثبت محور

ایرادی

$x'x$ حاده و زاویه حادثه مابین مماس بر نقطه از منحنی در شاخه نزولی با جهت مثبت محور $x'x$ منفرجه میباشد

۷۰- مورد استعمال قضیهٔ فوق — بنابر قضیهٔ فوق همواره ممکن است بواسطهٔ تحقیق علامت مشتق تابعی معلوم نمود که تابع مفروض در چه فاصله صعودی و در چه فاصله نزولی است چه در هر فاصله که مشتق مثبت است تابع صعودی و در هر فاصله که مشتق منفی است تابع نزولی میباشد

مثال ۱- مشتق تابع $y=2x-1$ عبارتست از $y'=2$ که همیشه مثبت است بنابراین تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x صعودی است

مثال ۲- مشتق تابع $y=1-2x$ عبارتست از $y'=-2$ که همیشه منفی است لذا تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x نزولی است

مثال ۳- مشتق تابع $y=x^2-4x+3$ عبارتست از $y'=2x-4$ که بازاء $x=2$ صفر و بازاء $x<2$ منفی و بازاء $x>2$ مثبت میباشد بنابراین تابع مفروض بازاء مقادیر $x<2$ نزولی و بازاء مقادیر $x>2$ صعودی خواهد بود

۷۱- ماکزیموم و مینیموم — بنابتعریف هرگاه تابعی صعودی بوجه

و بازاء $x = x_0$ نزولی گردد میگویند تابع مزبور بازاء $x = x_0$ ماکزیمم میباشد، همچنین هرگاه تابعی نزولی بوده و بازاء $x = x_0$ صعودی گردد میگویند تابع مزبور بازاء $x = x_0$ مینیموم میباشد

با ملاحظه قضیه فوق معلوم میشود که مقادیری از x که بازاء آنها تابع ماکزیموم یا مینیموم است مقادیری میباشند که مشتق بازاء آنها تغییر علامت میدهد و بر حسب آنکه از مثبت منفی گردد تابع ماکزیمم و یا از منفی مثبت گردد تابع مینیموم میباشد بطوریکه برای تعیین ماکزیمم و مینیموم تابع کافیست معلوم کنیم که بازاء چه مقادیر x مشتق تغییر علامت میدهد و بعد آن مقادیر را در تابع قرار داده ماکزیموم و مینیموم آنرا تعیین نمائیم

مثال ۱ — معلوم کنید بازاء چه مقادیر x تابع $y = x^3 - x^2 - x + 1$ ماکزیموم یا مینیموم است

مشتق تابع فوق را حساب میکنیم تا حاصل شود :

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

که بازاء $x = 1$ و $x = -\frac{1}{3}$ صفر میگردد و علامت آن نیز در فاصله جوابها بقراریست که در جدول ذیل دیده میشود :



x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			Max		min		

بطوریکه در جدول فوق ملاحظه میشود تابع مفروض بازاء مقادیر $x<-\frac{1}{3}$ صعودی و بازاء مقادیر $-\frac{1}{3}<x<1$ نزولی و بازاء مقادیر $x>1$ نیز صعودی بوده و بنابراین بازاء $x=-\frac{1}{3}$ دارای ماکزیمومی مساوی $\frac{32}{27}$ و بازاء $x=1$ دارای مینیمومی مساوی صفر میباشد

مثال ۲ـ مطلوبست تعیین ماکزیموم و مینیموم تابع $y=\frac{1}{(x-1)^2}$

مشتق تابع فوق عبارتست از :

$$y'=\frac{-2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-2}{(x-1)^3}$$

که بازاء $x=1$ مقدار آن $\pm\infty$ میباشد و علامت آن نیز بقرار ذیل میباشد

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	$\pm\infty$	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
			Max		

چنانکه از جدول فوق ملاحظه میشود مشتق تابع بازاء مقادیر $x<1$ مثبت ولذا تابع صعودی و بازاء مقادیر $x>1$ منفی ولذا تابع نزولی است و بازاء

$x=1$ دارای ماکزیموم $+\infty$ میباشد

مثال ۳ – مطلوبست تعیین ماکزیموم و مینیموم تابع $y=\frac{x^3}{3}+x-2$

مشتق تابع فوق عبارتست از $y'=x^2+1$

که علامت آن همیشه مثبت میباشد بنا بر این تابع مفروض بازاء جمیع مقادیر

صعودیست و دارای ماکزیموم و مینیموم نمیباشد

تعیین ماکزیموم و مینیموم توابع بوسیله استعمال مشتقات متوالی

۲۷۴ – تابع $y=f(x)$ را اختیار نموده و فرض میکنیم مشتق آن $y'=f'(x)$

باشد که بازاء $x=x_0$ صفر گردد حال باید تحقیق نمود که y' بازاء جواب

فوق تغییر علامت میدهد یا خیر برای اینکار مشتق ثانی تابع یعنی $y''=f''(x)$

را تشکیل داده x_0 جواب مشتق اول را در آن قرار میدهیم در اینصورت یکی

از سه حالت ذیل اتفاق میافتد :

$f''(x_0)<0 \qquad f''(x_0)>0 \qquad f''(x_0)=0$

اولاً $f''(x_0)<0$ در اینصورت $f''(x)$ بازاء x نزولی میباشد و چون x

$y = ax + b$

$a =$ حد $\frac{f x}{x}$ ، $x \to \infty$

[illegible]

آنرا صفر میکند بنابراین بازاء مقادیر کمی کوچکتر از آن مثبت و بازاء مقادیر کمی بزرگتر از آن منفی خواهد بود بطوریکه بازاء x_0 تغییر علامت میدهد و چون ابتدا مثبت و بعد منفی میگردد بنابراین تابع بازاء x_0 ماکزیموم میباشد

ثانیاً $f''(x_0) > 0$ در اینصورت $f'(x)$ بازاء x_0 صعودی میباشد و چون x_0 آنرا صفر میکند بنابراین بازاء مقادیر کمی کوچکتر از آن منفی و بازاء مقادیر کمی بزرگتر از آن مثبت میگردد بطوریکه تابع بازاء x_0 مینیموم خواهد بود

ثالثاً $f''(x_0) = 0$ یعنی جواب مشتق اول مشتق ثانی را نیز صفر میکند در اینصورت مشتق سوم یعنی $y''' = f'''(x)$ را تشکیل داده x_0 جواب مشترک مشتق اول و ثانی را در آن قرار میدهیم بانیشکل نیز سه حالت مختلف تشخیص داده میشود: $f'''(x_0) < 0$ ، $f'''(x_0) > 0$ ، $f'''(x_0) = 0$

هرگاه $f'''(x_0) < 0$ باشد $f''(x)$ بازاء x_0 نزولی میباشد و چون x_0 آنرا صفر میکند لذا بازاء مقادیر کمی کوچکتر از آن مثبت و بازاء مقادیر کمی بزرگتر از آن منفی خواهد بود بطوریکه $f'(x)$ که بازاء x_0 صفر میگردد بازاء مقادیر کمی کوچکتر از آن صعودی و بنابراین منفی و بازاء مقادیر

کمی بزرگتر از آن نزولی و لذا باز هم منفی میباشد بطوریکه $f'(x)$ بازاء x_0 صفر میگردد و بعلامت منها باقی میماند بنابراین تابع مفروض بازاء x_0 نه ماکزیم میباشد و نه مینیموم

همچنین است طرز استدلال در موقعی که $f'''(x_0) \neq 0$ باشد و درحالتیکه $f'''(x_0) = 0$ باشد باید مشتق چهارم راتشکیل داده و بهمین طریق تحقیق نمود

چون بطریقهٔ فوق عمل کنیم نتیجه میشود که هرگاه آخرین مشتقی از تابع $y = f(x)$ که بازاء x_0 جواب مشتق اول صفر میشود از مرتبه فرد باشد مشتق بازاء آن تغییر علامت داده و بنابراین تابع ماکزیم یا مینیموم میباشد واگر از مرتبه زوج باشد مشتق تغییر علامت نداده و بنابراین تابع بازاء آن نه ماکزیموم است و نه مینیموم

مثال — چون مشتقات متوالی تابع $y = (x-2)^5$ راحساب کنیم حاصل میشود :

$$y' = 5(x-2)^4 \qquad y'' = 20(x-2)^3 \qquad y''' = 60(x-2)^2$$

$$y^{IV} = 120(x-2) \qquad y^{V} = 120 \qquad y^{VI} = 0$$

چنانکه ملاحظه میشود $x = 2$ جواب مشتق اول مشتقات دوم وسوم وچهارم را

نیز صفر مینماید ولی چون آخرین مشتق که صفر میگردد از مرتبه زوج است

لذا تابع بازاء آن نه ماکزیموم است و نه مینیموم

بعلاوه باندک وقتی ملاحظه میشود که چون در عبارت $y' = 5(x-2)^4$

قوه $x-2$ زوج میباشد لذا عبارت مزبور بازاء $x=2$ تغییر علامت

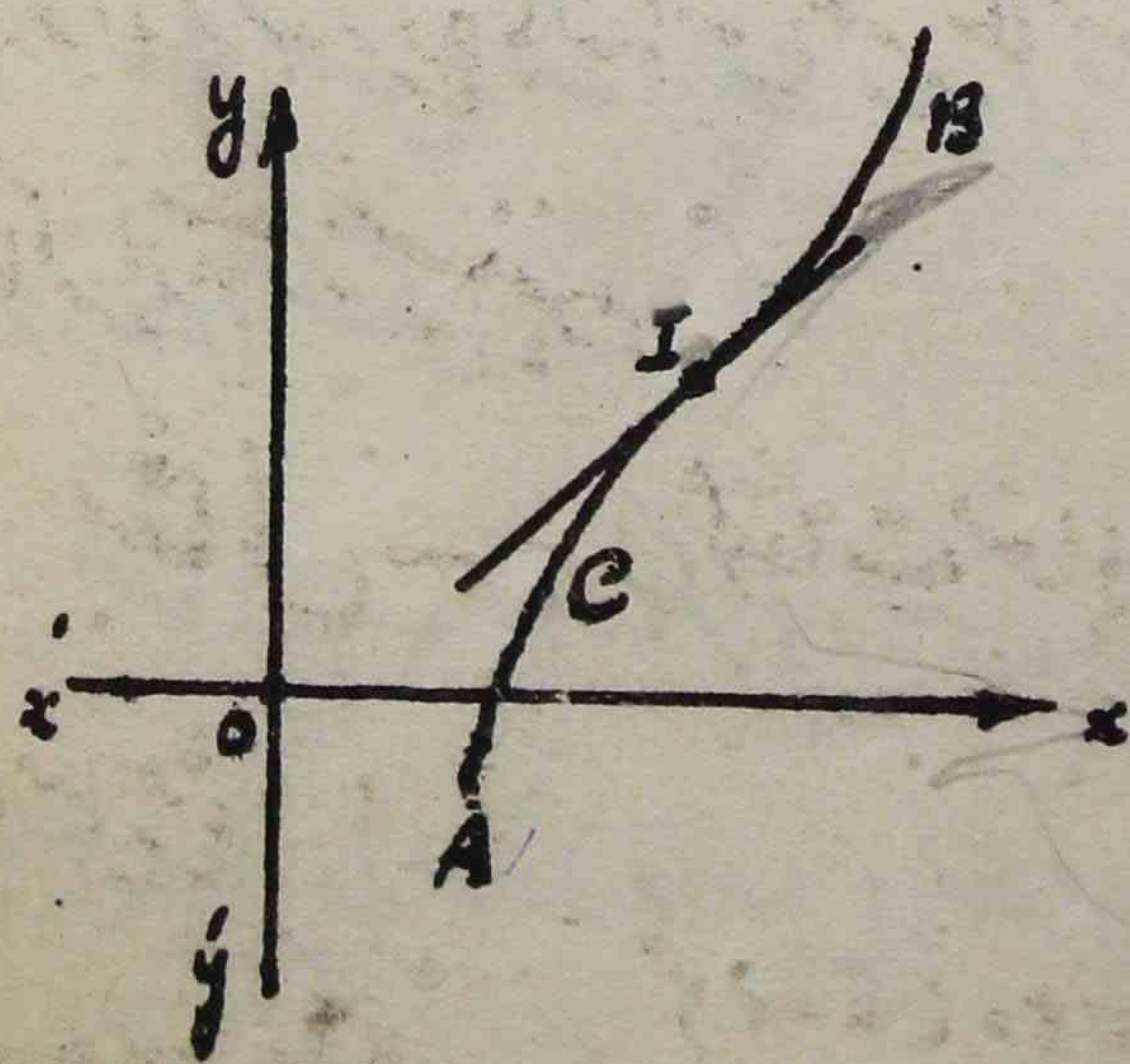
نداده و بعلامت مثبت باقی میماند

نقطه عطف

۷۳ ـ نقطه که مماس بر منحنی در آن نقطه از منحنی عبور نماید نقطه عطف نامیده

میشود مثلاً در منحنی C نقطه I نقطه عطف میباشد حال چون مماس

بر منحنی را در شاخهٔ AI



رسم کنیم دیده میشود که هرچه

از A به I نزدیک شویم

زاویه حادثه مابین مماس

و جهت مثبت محور x'x کوچک میشود

همچنین اگر خطوط مماس بر منحنی را در شاخه IB رسم نمائیم دیده میشود که هرچه

از B به I نزدیک شویم زاویهٔ حادثه مابین مماس با جهت مثبت محور x'x

کوچکتر میگردد بطوریکه زاویه مزبور در نقطه I به مینیموم خود میرسد.

حال اگر زاویه مماس بر منحنی را در نقطه I با جهت مثبت محور $x'x$ مساوی α فرض کنیم بنابر آنچه راجع بتعبیر هندسی مشتق بیان نمودیم مشتق تابع بازاء طول نقطه I عبارت خواهد بود از $y' = tg\,\alpha$ و چون y' بازاء طول نقطه I مینیموم است بنابراین مشتق آن بازاء طول نقطه I تغییر علامت میدهد بطوریکه برای تعیین نقاط عطف منحنی کافیست معلوم کنیم که مشتق ثانی تابع بازاء چه مقادیر x تغییر علامت میدهد این مقادیر طول نقاط عطف خواهند بود

در حالت مخصوصی که جواب مشتق ثانی مشتق اول را نیز صفر کند ضریب زاویه مماس بر نقطه عطف مساوی صفر ولذا مماس بر نقطه عطف موازی محور $x'x$ میگردد

مثال - نقاط ماکزیمم و مینیموم و نقطه عطف تابع $y = x^3 - 3x + 1$ را معلوم نموده و معادلهٔ مماس بر نقطهٔ عطف را تعیین کنید.

مشتق اول تابع عبارتست از $y' = 3x^2 - 3$ و مشتق ثانی آن عبارتست از $y'' = 6x$ که چون هریک را مساوی صفر قرار داده و علامت آنها را معلوم کنیم جدول ذیل بدست میآید :

x	-∞		-1		0		+1		+∞
y′		+	0	−		−	0	+	
y″		−		−	0	+		+	
			Max		نقطه عطف		Min		

چنانکه از جدول فوق ملاحظه میشود منحنی تابع مفروض در نقطه $M(-1, 3)$ ماکزیموم و در نقطه $N(1, -1)$ مینیموم و در نقطه $I(0, 1)$ دارای نقطه عطف میباشد

حال برای تعیین معادلهٔ مماس بر نقطه عطف در صورت کلی خطوط مار بر نقطه عطف که عبارتست از $y - 1 = mx$ بجای m ضریب زاویه مماس را که برابر است با ٣- قرار میدهیم تا حاصل شود $y = -3x + 1$

رسم جدول و منحنی تغییرات توابع

٧٤ - چنانکه گفتیم هرگاه در تابع $y = f(x)$ برای x مقادیر مختلفه فرض نموده و مقادیر نظیر آنها را برای y حساب کنیم و نقاط نظیر این دستگاههای x و y را نسبت بسطح دو محور قائم تعیین نمائیم این نقاط تشکیل خطی را میدهند که آنرا نمایش هندسی تابع $y = f(x)$ مینامند



حال برای رسم نمایش هندسی تغییرات تابع $y = f(x)$ عموماً خطوط و نقاط اصلیه را تعیین نموده و از وصل نقاط مزبور بیکدیگر با رعایت جهت تغییرات تابع منحنی آنرا رسم مینمائیم از اینقرار :

۱ـ x را بسمت ∞ میل میدهیم درصورتیکه y دارای حدی مانند a باشد خط $y = a$ مجانب منحنی میباشد

۲ـ y را بسمت ∞ میل میدهیم درصورتیکه x دارای حدی مانند a باشد خط $x = a$ مجانب منحنی خواهد بود

۳ـ درصورتیکه منحنی دارای مجانب غیر موازی با دو محور و یا دارای مجانب منحنی باشد آنرا نیز مطابق دستوریکه سابقاً بیان نمودیم بدست میآوریم

۴ـ x را مساوی صفر اختیار نموده مقدار y نظیر آنرا بدست میآوریم دراینصورت نقطه تقاطع منحنی با محور y ها بدست میآید

۵ـ مقدار y را مساوی صفر قرار داده مقادیر x نظیر آنرا حساب میکنیم دراینصورت نقاط تقاطع منحنی با محور x ها بدست میآید (گاهی تعیین این مقادیر x منجر بحل معادلاتی میشود که آنها را اصولاً نمیتوان حل نمود یا آنکه حل آنها بآسانی امکان پذیر نیست در اینصورت از تعیین این نقاط صرف نظر

مینمائیم بلکه رسم منحنی را وسیله برای حل معادله و یا بحث در عده ریشه های آن قرار میدهیم)

۶- مشتق تابع را حساب نموده و معلوم میکنیم بازاء چه مقادیر صفر شده و یا بینهایت میگردد و علامت آنرا در فواصل این مقادیر تعیین مینمائیم واضح است که بازاء هر مقدار که مشتق تغییر علامت دهد تابع ماکزیمم و مینیموم میباشد باین ترتیب نقاط منحنی نظیر ماکزیموم و مینیموم تابع نیز بدست میآید

۷- برای آنکه رسم منحنی بتحقیق نزدیکتر باشد ممکن است مخصوصاً در توابعی که کلیه مشخصات فوق را دارا نیستند بطور اختیار مقادیری برای x فرض نموده مقادیر y نظیر آنها را بدست آورد باینشکل نیز یکعده نقاط منحنی معلوم میگردد

۸- در توابع اصم یعنی توابعی که در آنها x زیر رادیکال باشد باید قبلاً تعیین نمود که بازاء چه مقادیر x تابع دارای مقدار حقیقی میباشد تا آنکه همیشه مقادیر x را در آن حدود اختیار نمود

۹- پس از انجام مقدمات فوق جدولی ترتیب داده و مقادیر x را مرتباً از $-\infty$ تا $+\infty$ در آن تنظیم میکنیم و جوابهای مشتق و علامت آنرا در فواصل جوابها در آن یاد داشت نموده نقاط نظیر آنها را تعیین و منحنی را بطور تقریب رسم میکنیم

اینک برای نمونه مسائل ذیل را حل میکنیم

مسئله ۱- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $3+2x+x^2=y$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق تابع عبارت از $y' = -2x + 2$ که بازاء $x = 1$ صفر میگردد

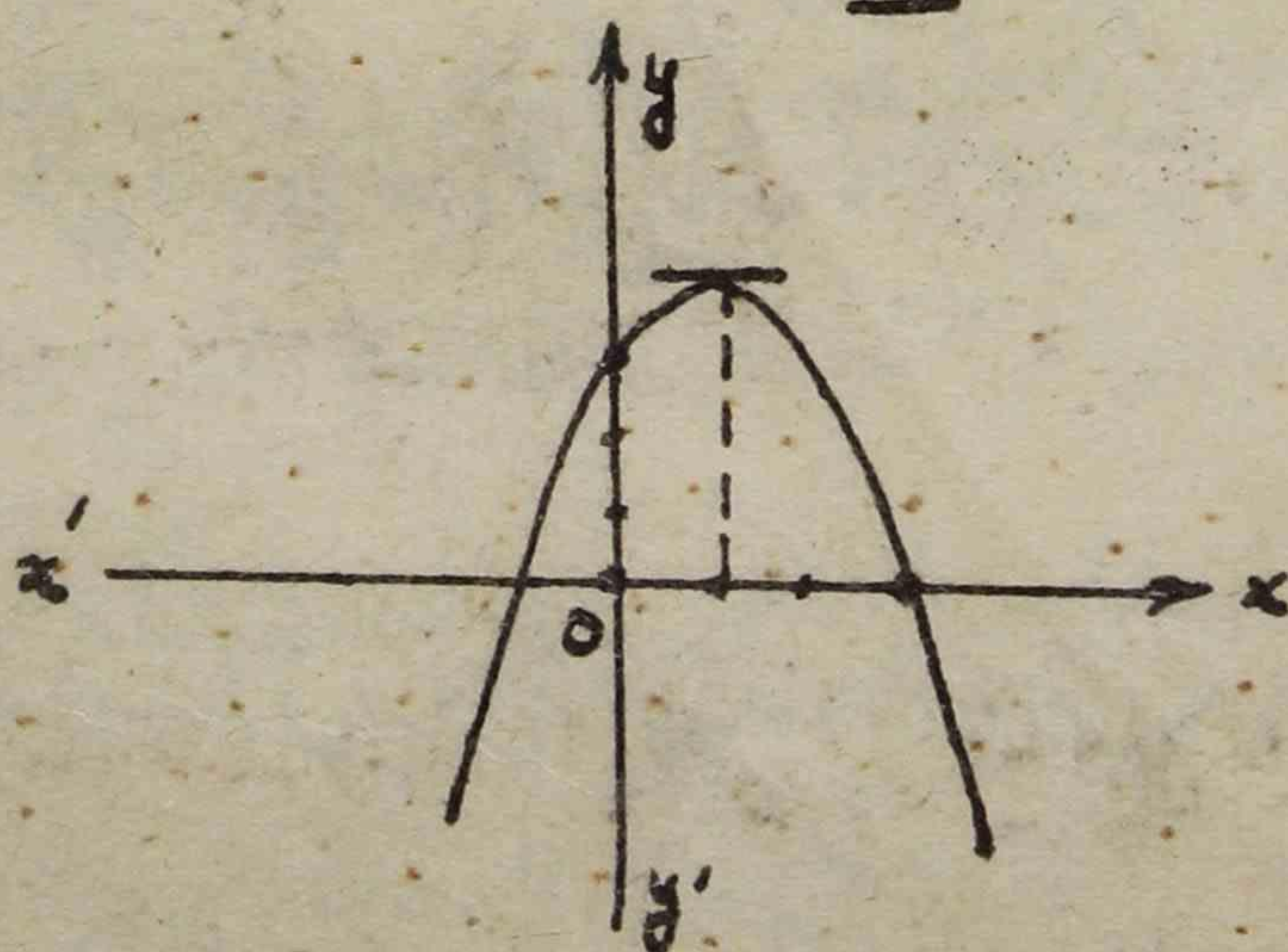
۳- بازاء $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = -\infty$

۴- بازاء $x = 0$ حاصل میشود $y = 3$

۵- بازاء $y = 0$ حاصل میشود $x = 3$ و $x = -1$

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل میباشد:

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
y'		+		+		+	0	−		−	
y	$-\infty$	↗	0	↗	3	↗	4 Max	↘	0	↘	$-\infty$



مسئله ۲ - جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x^3 - 6x + 5$ را رسم کنید

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق آن عبارت است از $y' = 3x^2 - 6$ که بازاء $x = \pm\sqrt{2}$



صفر میگردد

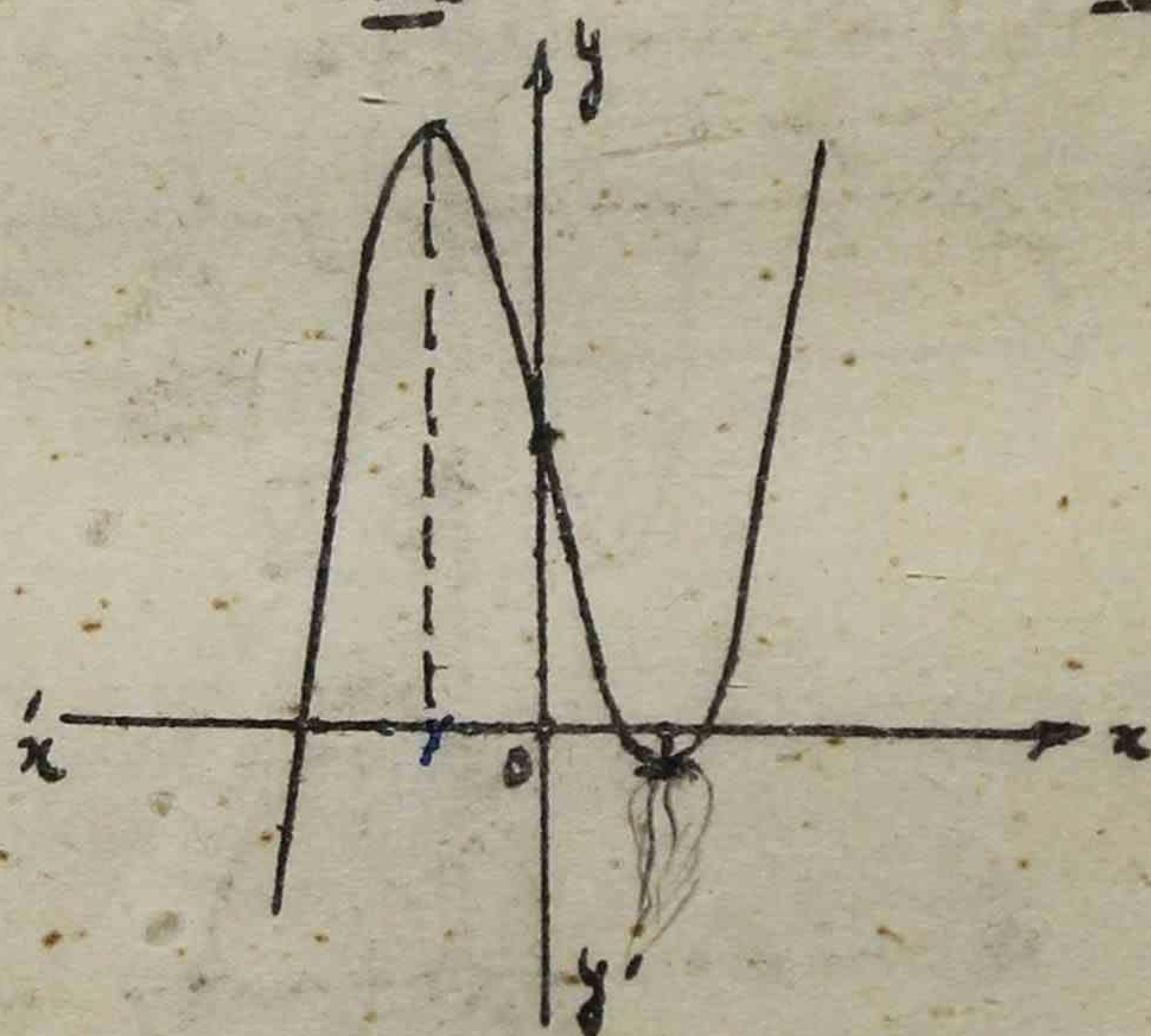
۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=\pm\infty$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=5$

۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=1$ و $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

جدول و منحنی تغییرات آن بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$		$-2{,}8$		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$		$1{,}8$		$+\infty$
y'		+	+		0		−	−	−		0		+	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$10{,}6$	↘	5	↘	0	↘	$-0{,}6$	↗	0	↗	$+\infty$
					Max						Min				



مسئله ۳- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع دو مجذوری

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = 4x^3 - 10x$ که بازاء $x=0$ و $x=\frac{\pm\sqrt{10}}{2}$ صفر میگر



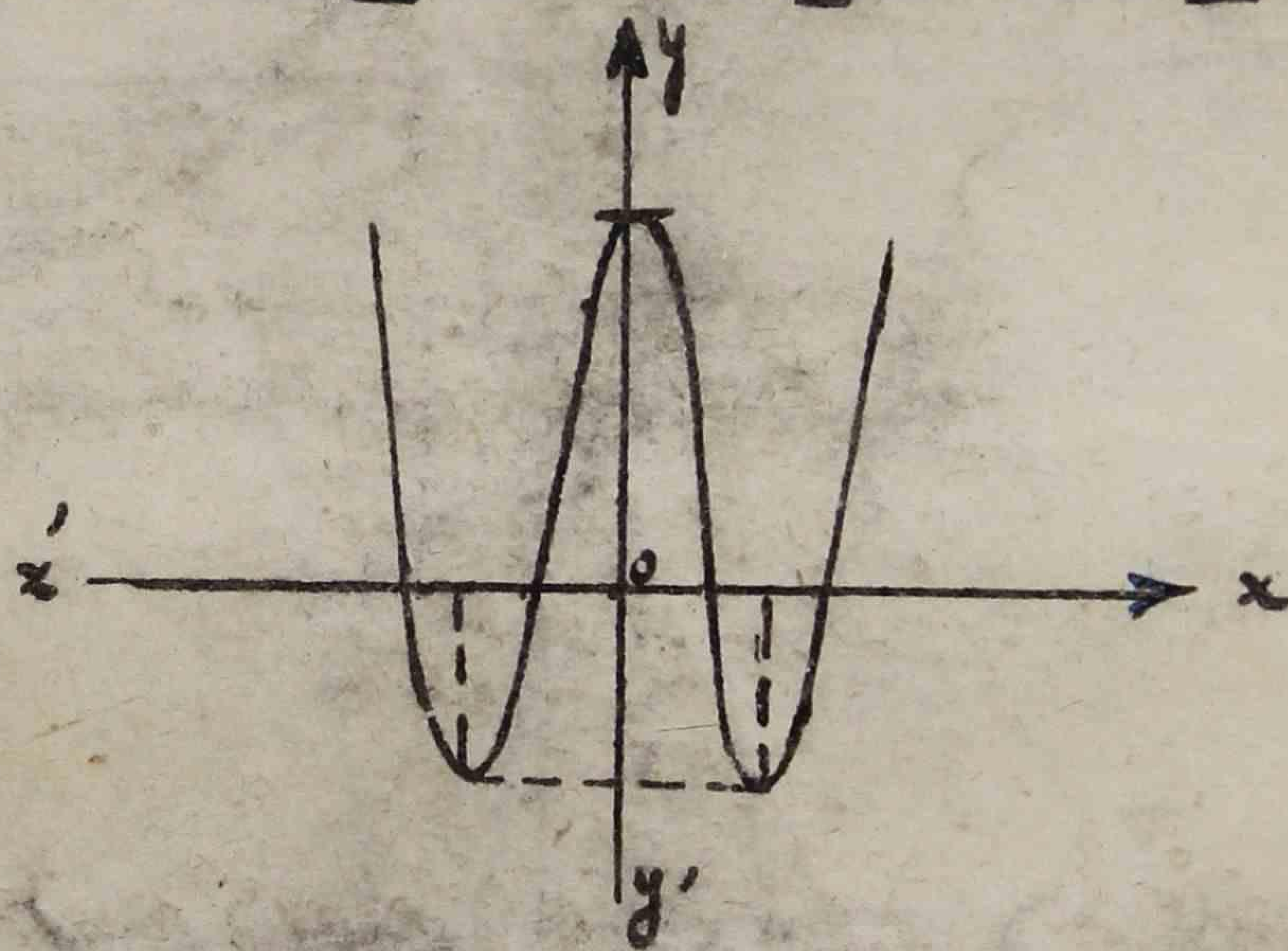
۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=+\infty$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=4$

۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=\pm1$ و $x=\pm2$

جدول ومنحنی تغییرات تابع بصورت ذیل میباشد :

x	$-\infty$	-2	$-1,5$	-1	0	1	$1,5$	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-2,2$ ↗	0 ↗	4 ↘	0 ↘	$-2,2$ ↗	0 ↗	$+\infty$
			min		max		min		



مسئله ۴ - مطلوبست رسم جدول ومنحنی تغییرات تابع $y=\frac{x+1}{x-2}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است مگر بازاء $x=2$ که بازاء آن مقدار $y=\pm\infty$ میباشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y'=\frac{-3}{(x-2)^2}$ که بازاء جمیع مقادیر x منفی میباشد.

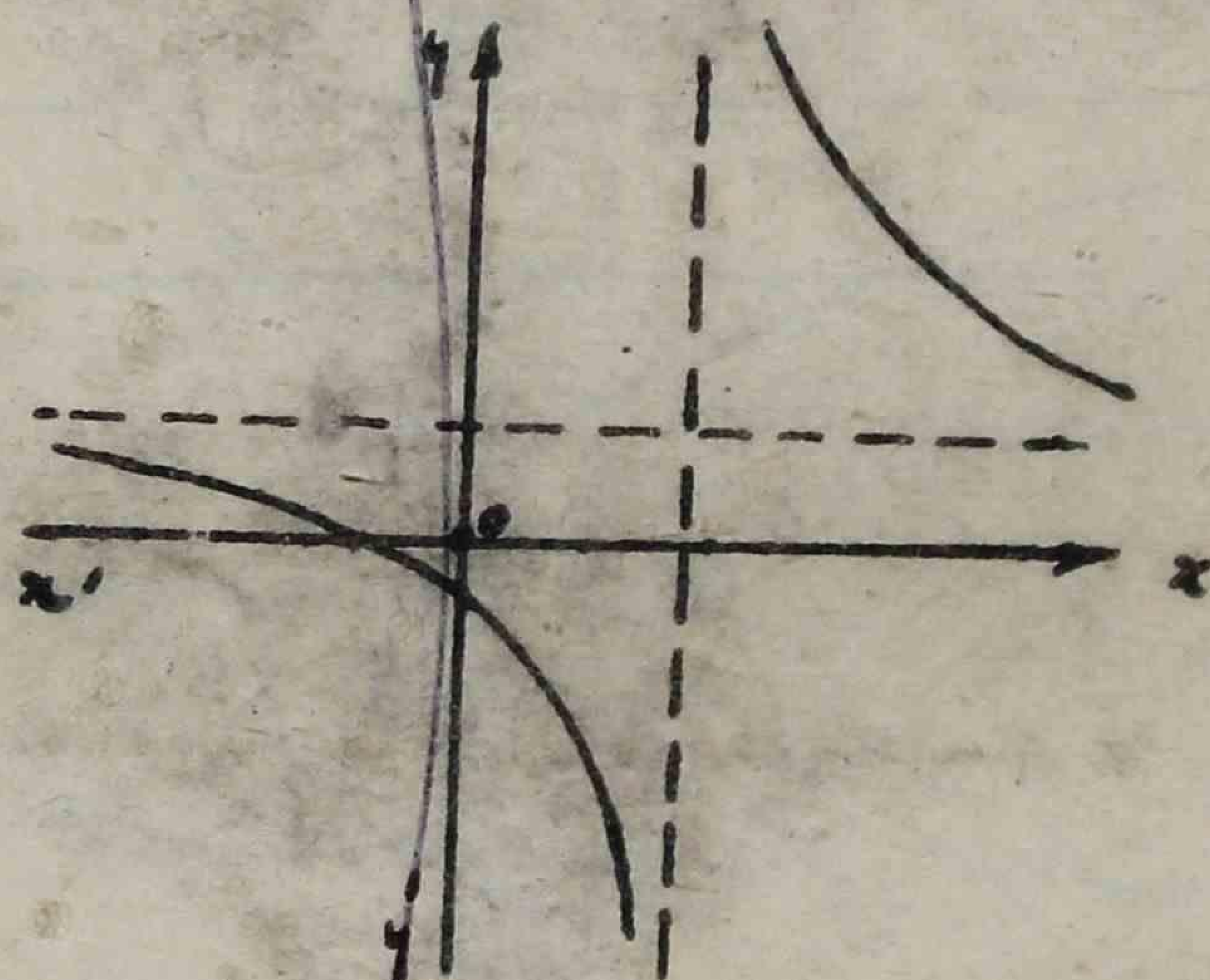
۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=1$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=-\frac{1}{2}$

۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=-1$

جدول ومنحنی تغییرات تابع بصورت ذیل میباشد؛

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'									
y	1	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty \| +\infty$	↘	1



مسئله ۵- مطلوبست رسم جدول ومنحنی تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق آن عبارتست از $y'=\frac{-4x^2+12x}{(x^2-2x+3)^2}$ که بازاء $x=0$ و $x=3$ صفر میگردد

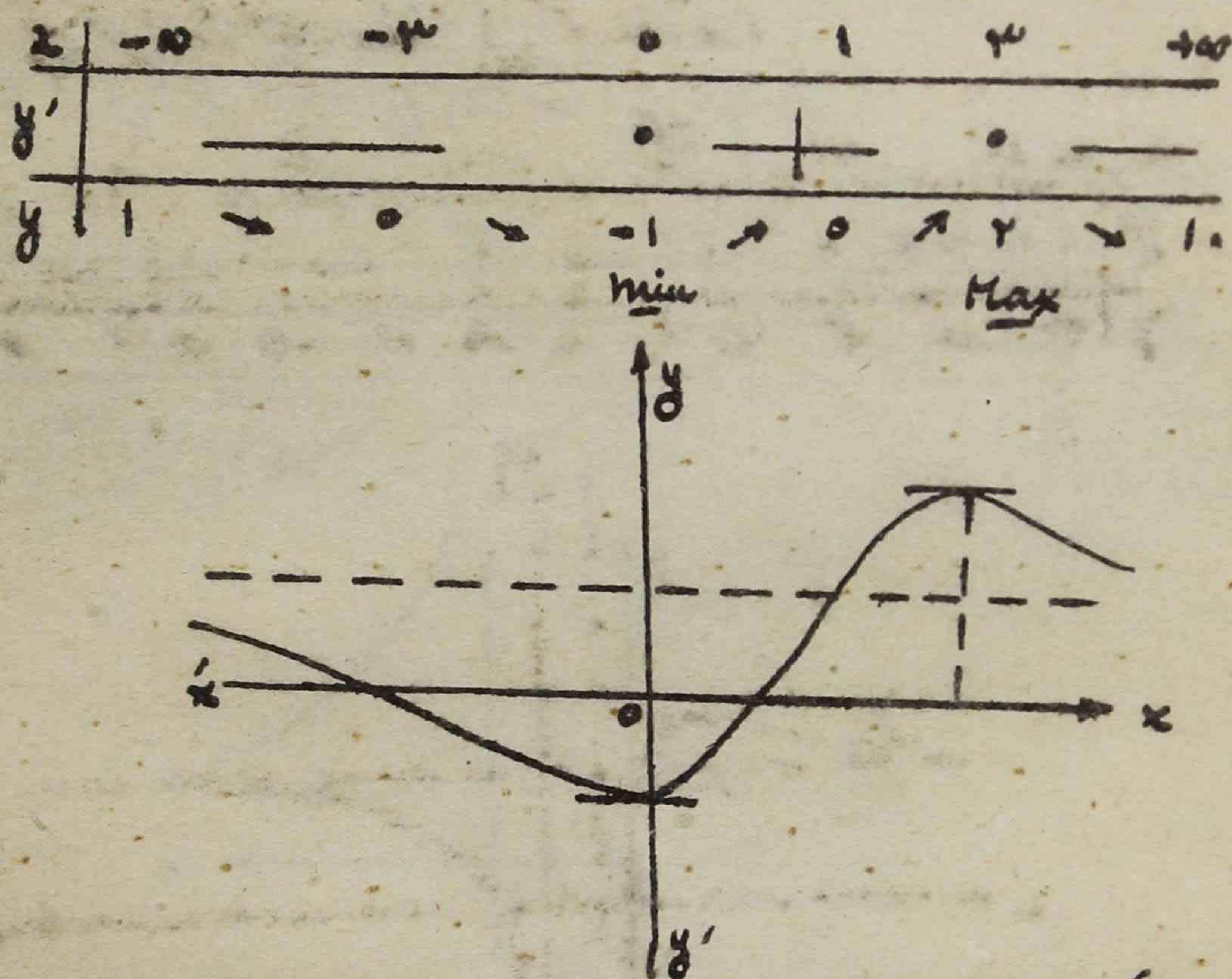
۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=1$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=-1$



۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=1$ و $x=-3$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد :



x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
y'		$-$			0		$+$		0	$-$	
y	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2	↘	1
					min				Max		

مسئله ۶- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع :

$$y=\frac{3x^2+2x-5}{(x+1)^2}$$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است بازاء $x=-1$ جواب مخرج مقدار y برابر است با $-\infty$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y'=\frac{4(x+3)}{(x+1)^3}$ که بازاء $x=-3$ صفر و بازاء $x=-1$ منفصل میگردد

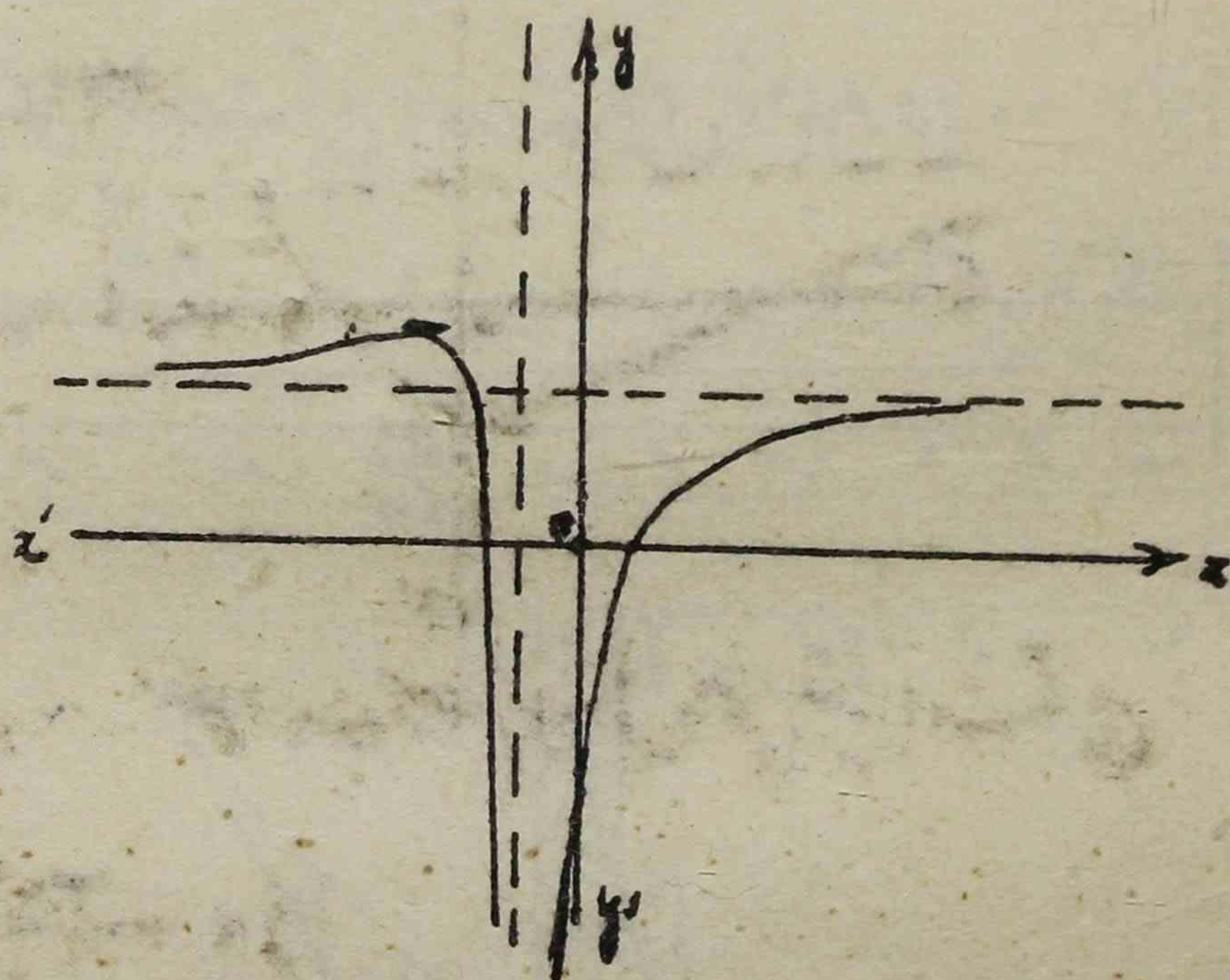
۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=3$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=-5$

۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=1$ و $x=-\frac{5}{3}$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{3}$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−			‖			+			
y	3	↗	4	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-5	↗	0	↗	3



مسئله ۷ - مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{x^2-x-4}{x-1}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است مگر بازاء $x=1$ جواب مخرج که بازاء آن مقدار $y=\pm\infty$ میباشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y'=\frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$ که علامت آن همیشه مثبت و بنابراین تابع همیشه صعودی است



۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=\pm\infty$

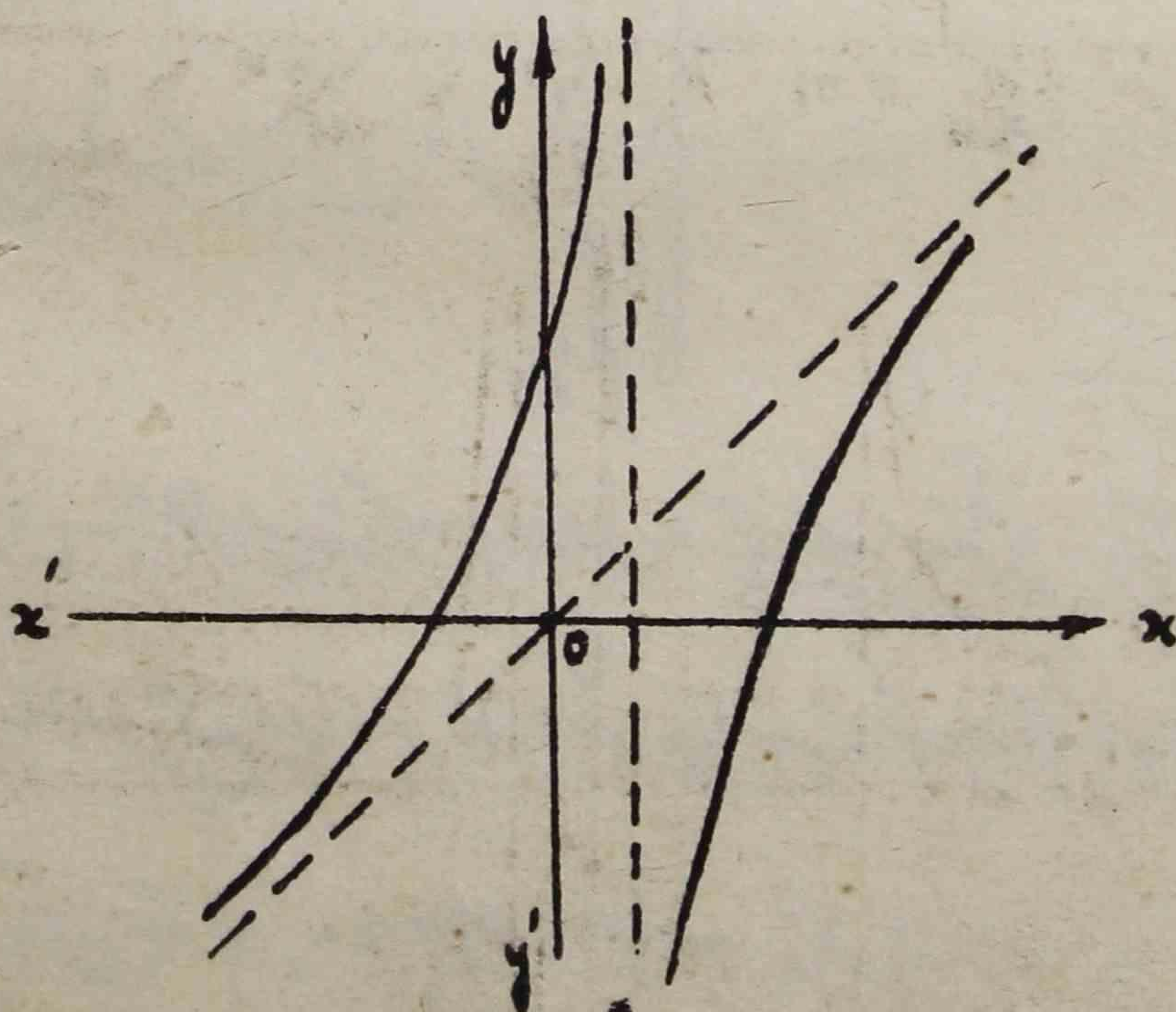
۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=4$

۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

۶- چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارتست از x بنابراین خط $y_1=x$ مجانب منحنی میباشد

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل خواهد بود

x	$-\infty$		-1.5		0		1		2.5		$+\infty$
y'											
y	$-\infty$	↗	0	↗	4	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



مسئله ۸ - مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+3x-4}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است مگر بازاء $x=1$ و $x=-4$



جوابهای مخرج که مقدار y نظیر آن برابر است با $\pm\infty$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{(x-2)(7x-2)}{(x^2+3x-4)^2}$ که بازاء $x=2$

و $x=\frac{2}{7}$ صفر میگردد

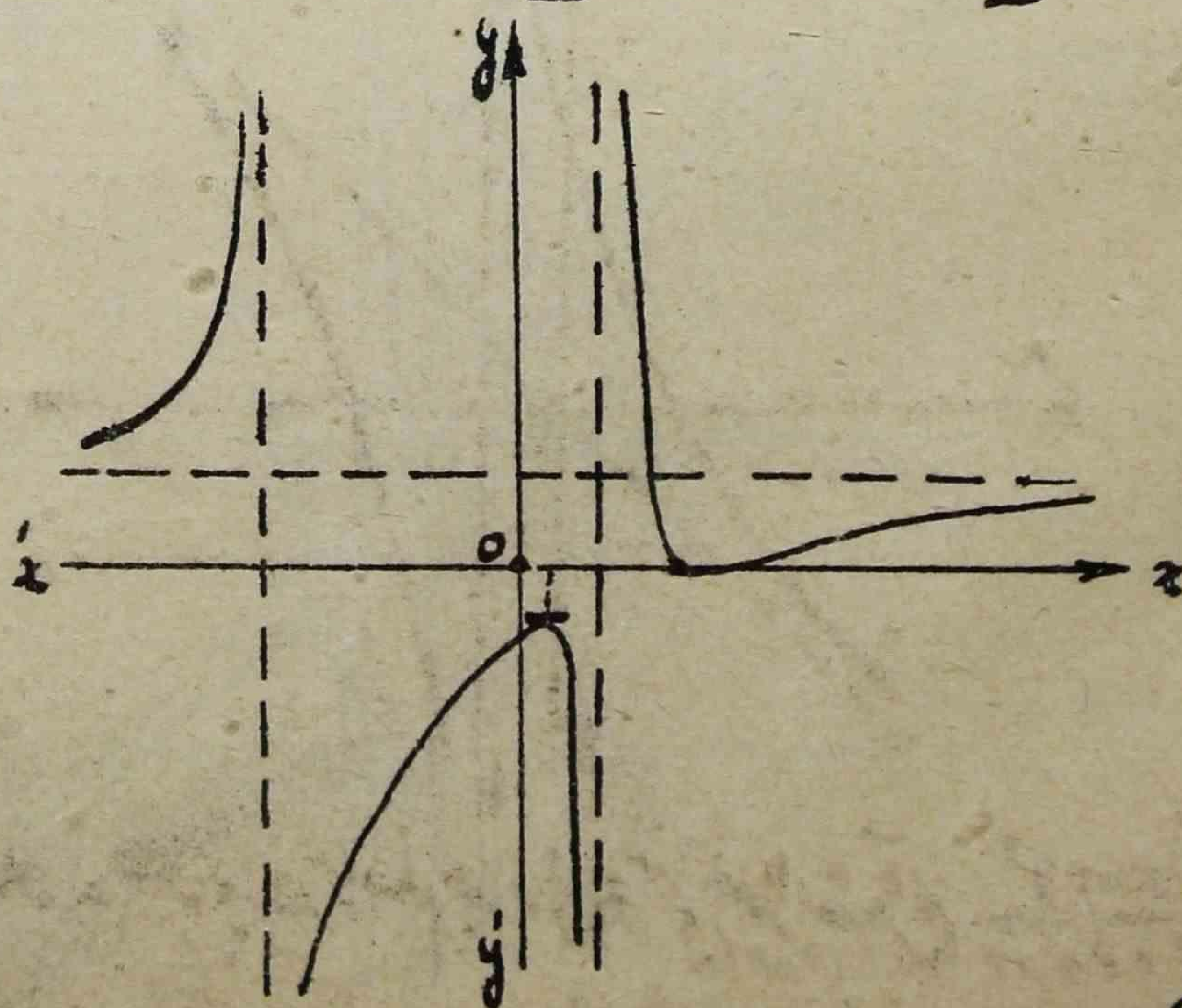
۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=1$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=-1$

۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=2$

جدول ومنحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد :

x	$-\infty$		-4		0		$\frac{2}{7}$		1		2		$+\infty$
y'		+	‖	+		+	0	−	‖	−	0	+	
y	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↗	$-0,9$ Max	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0 min	↗	1



مسئله ۹- مطلوبست رسم جدول ومنحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است مگر بازاء $x=\pm 1$ که مقدار y نظیر آن عبارتست از $\pm\infty$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ که بازاء $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ صفر میگردد

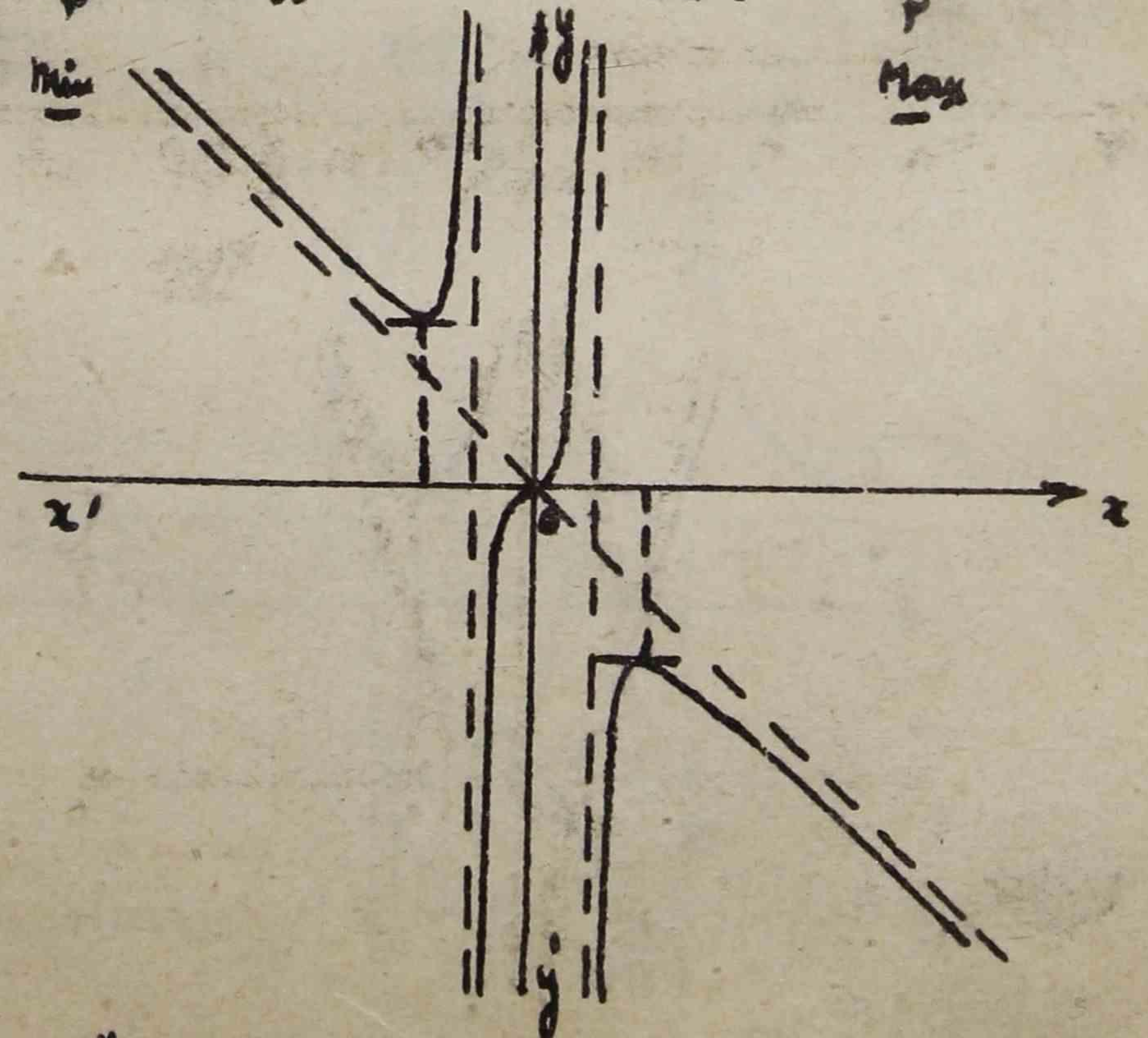
۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=\mp\infty$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=0$

۵- چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارت میگردد از $-x$ و بنابراین خط $y=-x$ مجانب منحنی میباشد

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ min	↗	$+\infty \vert -\infty$	↗	0	↗	$+\infty \vert -\infty$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ max	↘	$-\infty$



مسئله ۱۰- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{x^3+1}{x}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است مگر بازاء $x=0$ جواب مخرج که مقدار y نظیر آن عبارتست از $\pm\infty$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{2x^3-1}{x^2}$ که بازاء $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ صفر میگردد

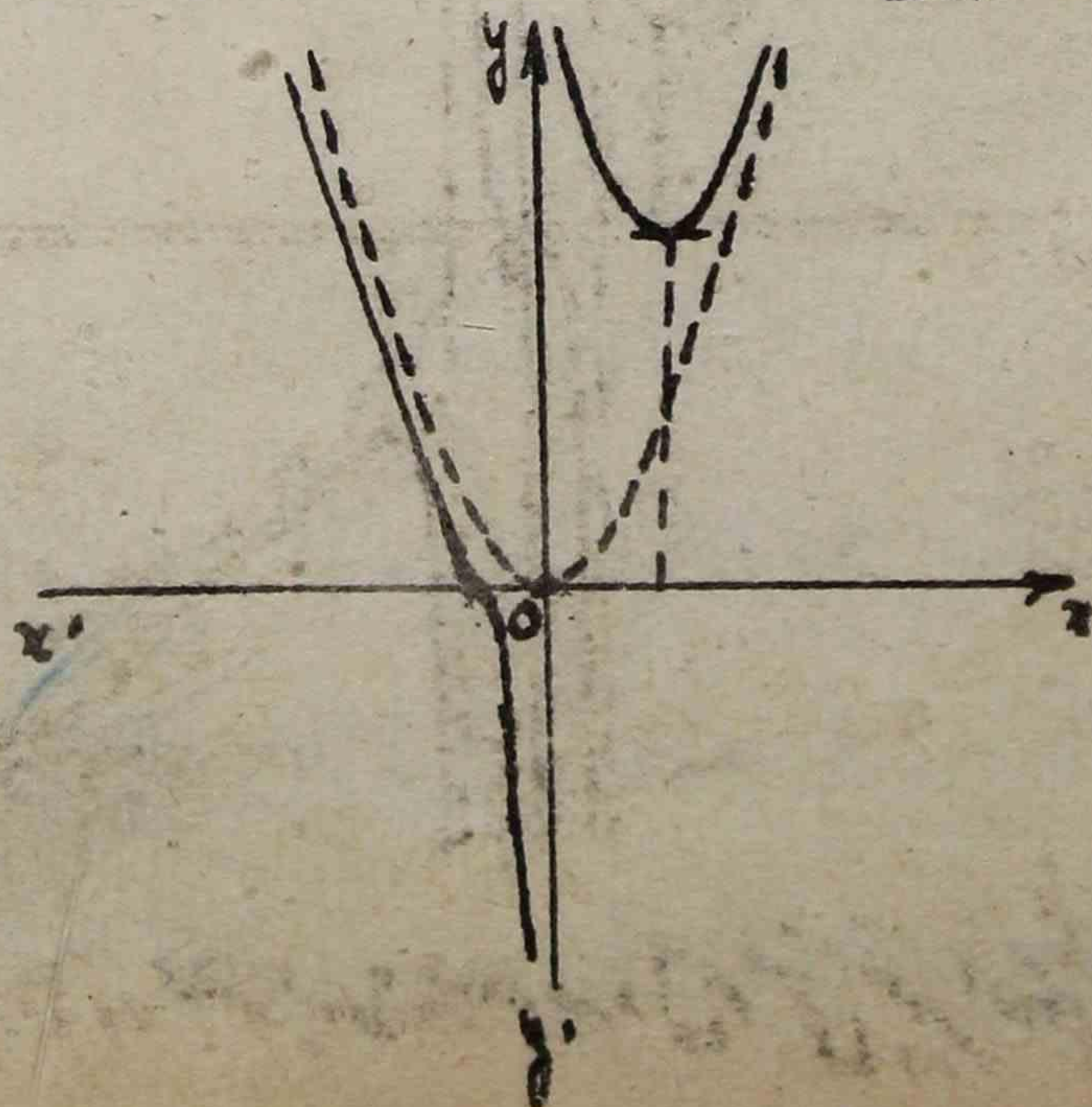
۳- بازاء $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = +\infty$

۴- بازاء $y = 0$ حاصل میشود $x = -1$

۵- چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارتست از x^2 وبنابراین خط $y = x^2$ مجانب منحنی میباشد

جدول ومنحنی تغییرات بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$			0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$	↗	$+\infty$
							min		



توابع اصمّ

۷۵ - هرگاه متغیر زیر رادیکال باشد تابع را اصم گویند و در تغییرات تابع اصم قبلاً لازم است تحقیق نمود که تابع بازاء چه مقادیر x حقیقی میباشد تا آنکه تغییرات x را در حدود مقادیر مزبوره اختیار نمود اینک برای نمونه تغییرات چند تابع اصم را مورد بحث قرار میدهیم

مسئله ۱ - مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = 2x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

۱- برای آنکه تابع دارای مقدار حقیقی باشد باید $\frac{x}{x+1} \geq 0$ و بنابراین $x \geq 0$ و یا $x < -1$ باشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \times \frac{2x+3}{x+1}$ که علامت آن همیشه بعلامت $\frac{2x+3}{x+1}$ میباشد که بازاء $x = -\frac{3}{2}$ صفر و بازاء $x = -1$ منفصل میگردد

۳- بازاء $x = -1$ حاصل میشود $y = -\infty$

۴- بازاء $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = \pm\infty$

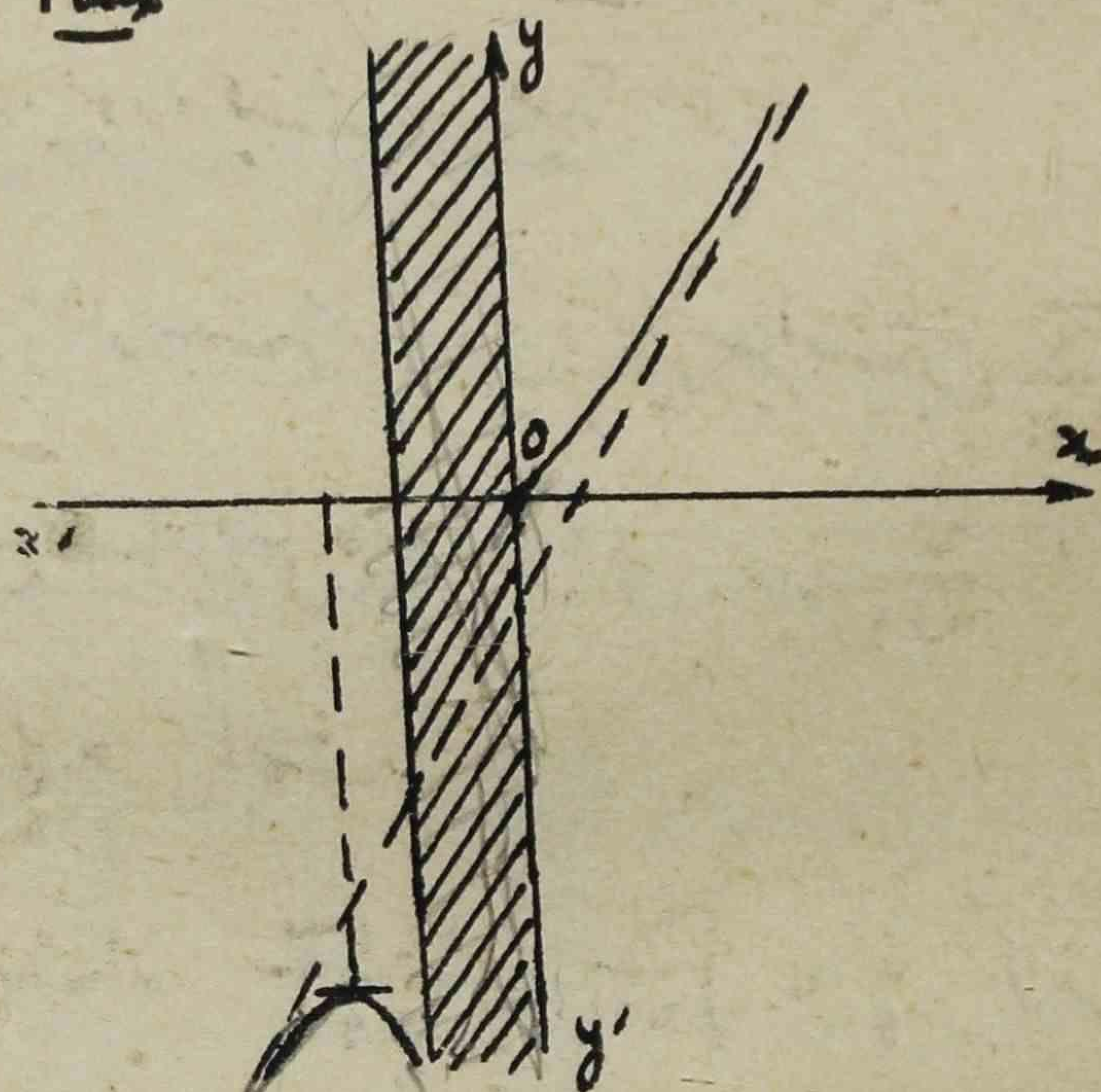
۵- بازاء $x = 0$ حاصل میشود $y = 0$

۶- چون معادلهٔ خط مجانب غیر موازی با دو محور را در تابع فوق بطریقی که

سابقاً گفته ایم بدست آوریم حاصل میشود $y_1 = 2x - 1$

جدول ومنحنی تغییرات بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-3\sqrt{4}$	↘	$-\infty$		1	↗	$+\infty$
			Max						



مسئله ۲ - مطلوبست رسم جدول ومنحنی تغییرات تابع $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ بفرض آنکه $a>0$ باشد

۱- برای آنکه تابع دارای مقدار حقیقی باشد باید $\frac{a-x}{a+x} \geq 0$ ویا $-a < x \leq a$ باشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{-x^2 - ax + a^2}{(a+x)\sqrt{(a-x)(a+x)}}$ که مخرج آن همیشه مثبت وجوابهای صورت عبارتست از $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ و $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$ وبنابراین علامت صورت در فاصلهٔ دو جواب مثبت ودر خارج دو جواب منفی است

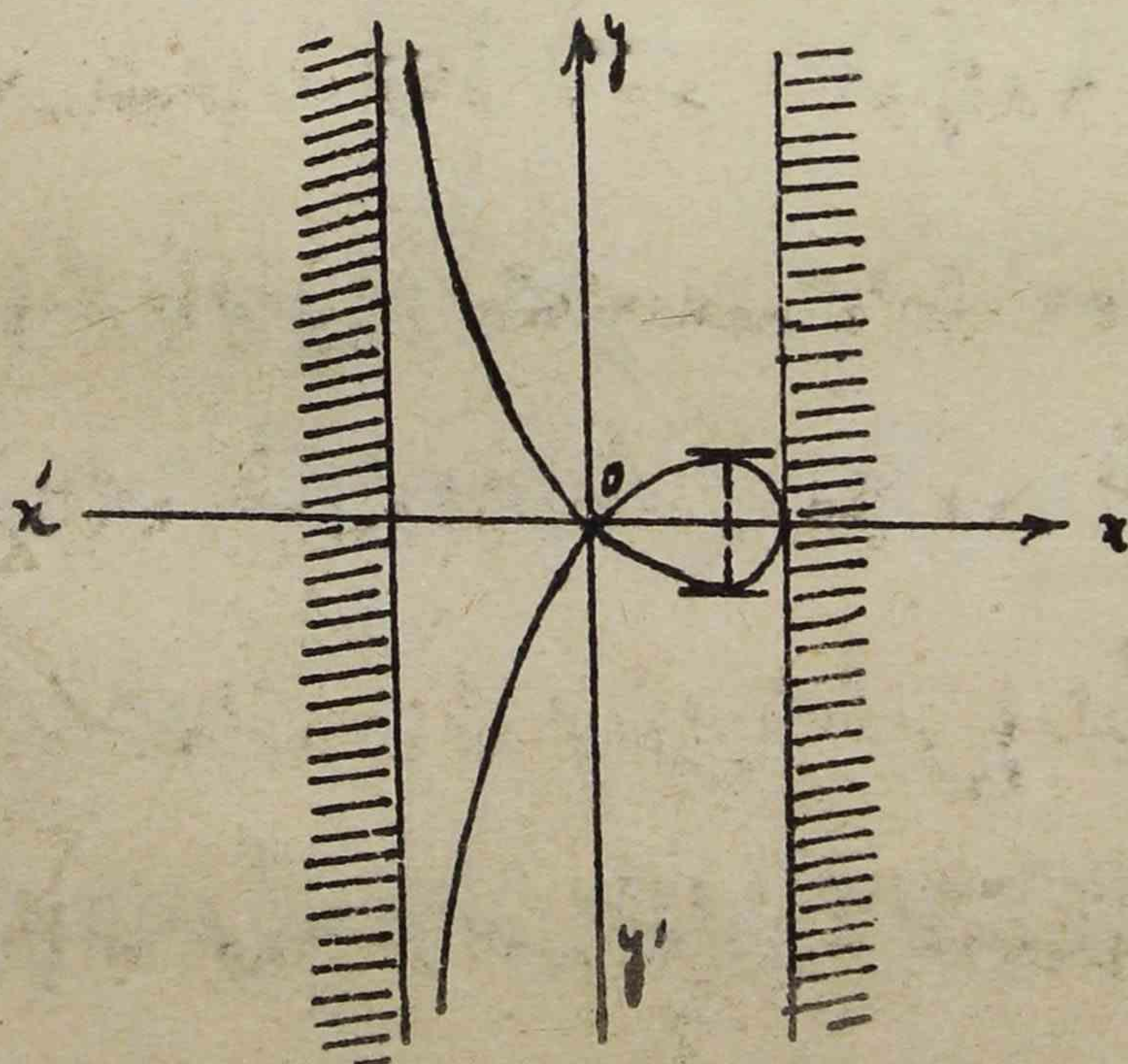
ولیکن چون جواب دوم از $a-$ کوچکتر است لذا تابع بازاء آن دارای مقدار حقیقی نخواهد بود

۳- بازاء $x = -a$ مقدار $y = -\infty$ میباشد

۴- بازاء $x = 0$ حاصل میشود $y = 0$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد

x	$-a$		0		$\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$		a
y'			$+$		0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0



تبصره - هرگاه بطور کلی تغییرات تابع $y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x}$ را مورد بحث قرار دهیم منحنی دیگری بدست میآید که نسبت بمحور $x'x$ با منحنی اول قرینه میباشد و آن عبارتست از منحنی $y = -x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

منحنی تغییرات $y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ ویا $y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x}$ راکه مرکب

از دو شاخهٔ قرینهٔ فوق میباشد Strophoide مینامند

مسئله ۳ - مطلوبست رسم جدول ومنحنی تغییرات تابع $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$

که در آن $a > 0$ فرض شده است

۱- برای آنکه تابع دارای مقدار حقیقی باشد باید $\frac{x}{a-x} \geq 0$ واز آنجا $a > x \geq 0$

باشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{\sqrt{x}\,(3a-2x)}{2\sqrt{(a-x)^3}}$ که مخرج آن همیشه

مثبت وجوابهای صورت عبارتست از $x = 0$ و $x = \frac{3}{2}a$ وچون $\sqrt{x}$

همواره مثبت میباشد بنابراین علامت صورت علامت $3a-2x$ میباشد

که بازاء مقادیر $x < \frac{3}{2}a$ مثبت وبازاء مقادیر $x > \frac{3}{2}a$ منفی میباشد

وچون $\frac{3}{2}a$ بزرگتر از a میباشد لذا تابع ومشتق بازاء آن دارای

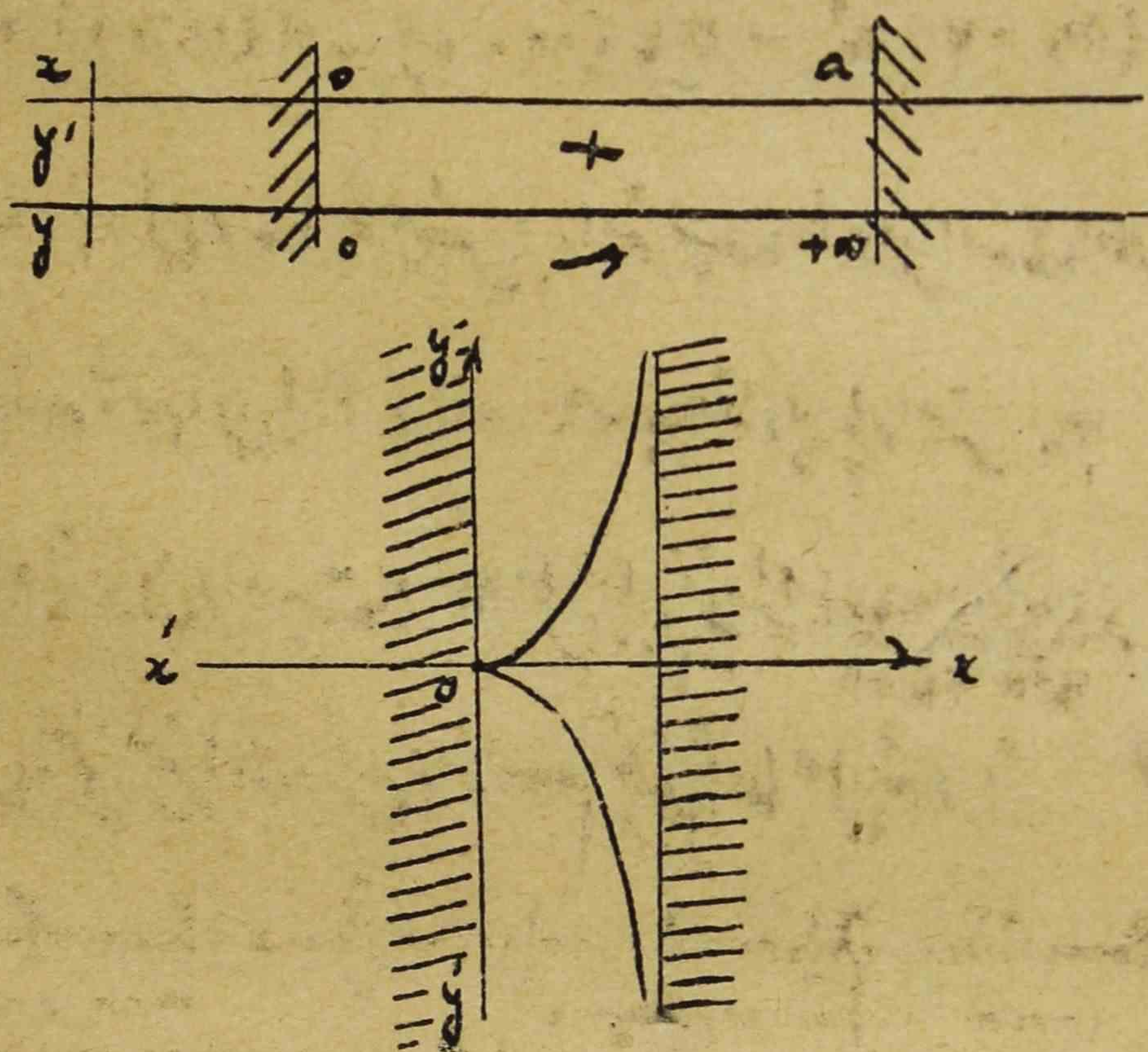
مقدار حقیقی نمیباشد بطوریکه علامت مشتق همیشه مثبت وتابع صعودی

است .

۳- بازاء $x = a$ حاصل میشود $y = +\infty$

۴- بازاء $x = 0$ حاصل میشود $y = 0$

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل میباشد



تبصره - چون بطور کلّی تغییرات تابع $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ را مورد مطالعه قرار دهیم منحنی دیگری قرینهٔ منحنی فوق نسبت بمحور $x'x$ بدست میآید که عبارتست از منحنی تغییرات $y = -x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$

منحنی تغییرات تابع $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ و یا $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ را که مرکب از دو شاخهٔ قرینهٔ فوق میباشد Cissoïde مینامند

حلّ گرافیک بعضی مسائل

۷۶ - رسم منحنی تغییرات توابع را همواره ممکن است وسیله برای حل و بحث بعضی مسائل پارامتری قرار داد از قرار ذیل :



مسئله ۱ - معادلهٔ درجه دوم :

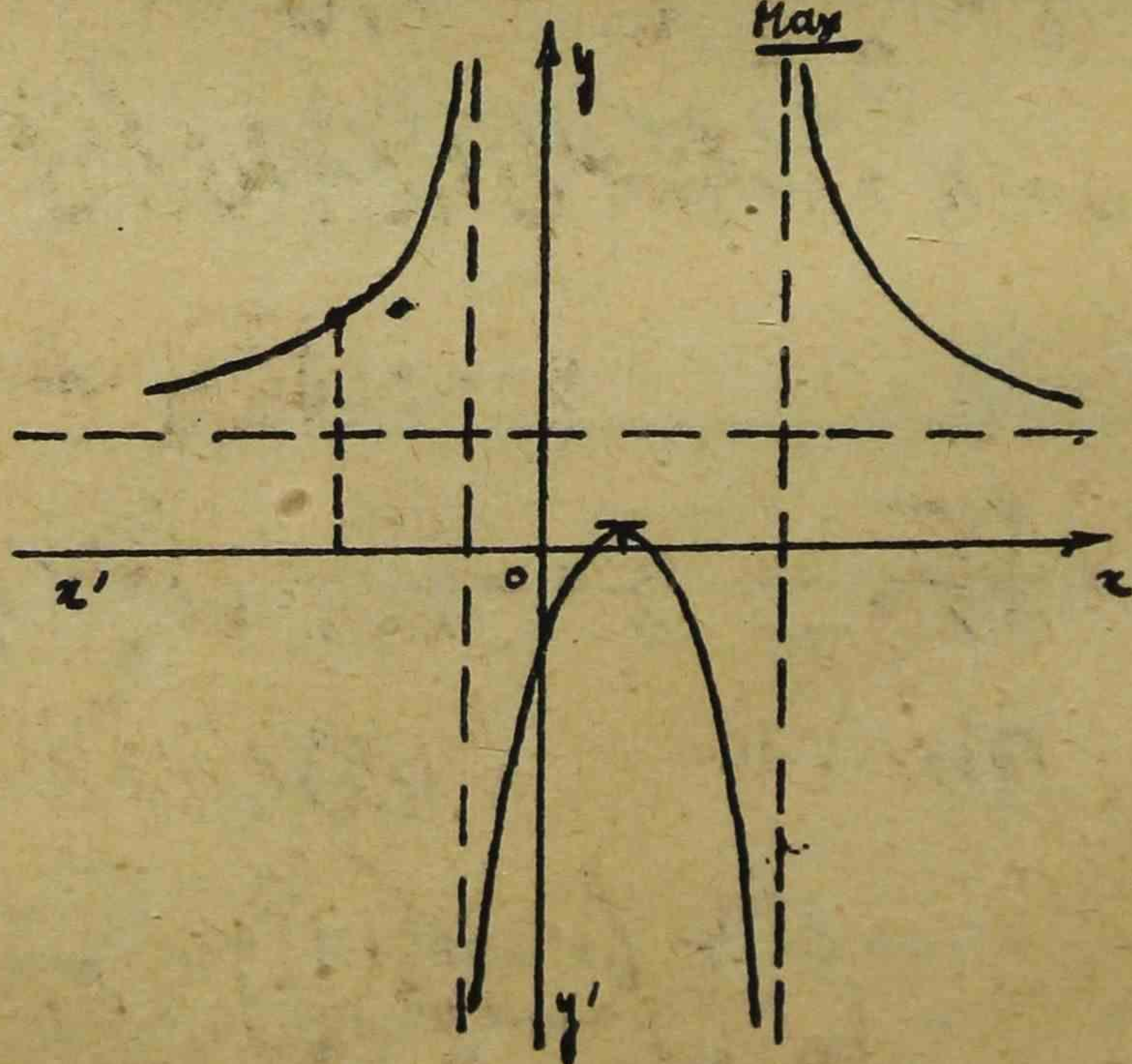
$$(m-2)x^2 - 3x(m-2) - 4(m+1) = 0$$

که در آن x مجهول و m نمایش پارامتریست مفروض است مطلوبست مقایسهٔ ریشه‌های آن با ۴ و ۲- برحسب مقادیر پارامتر m.

چون معادلهٔ فوق را نسبت به m حل میکنیم نتیجه میشود $m = \dfrac{2(x^2-3x+2)}{x^2-4x-4}$

حال جدول و منحنی تغییرات تابع را رسم میکنیم تا حاصل شود :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$\frac{3}{2}$		2		4		$+\infty$
m'		—		—	|	—		—			0			—		—	
m	2	↗	4	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	$\frac{2}{25}$ Max	↘	0	↘	$+\infty$ / $-\infty$	↘	2



بطوریکه ملاحظه میشود x_1 و x_2 جوابهای معادلهٔ مفروض عبارتست از طول نقاط تقاطع خط $y=m$ با منحنی فوق که چون آنها را نسبت به ۴ و ۲- مرتب کنیم نتیجه ذیل بدست آید

۱- $m < \frac{2}{25}$ $\qquad$ $-2 < x'' < x' < 4$

۲- $m = \frac{2}{25}$ $\qquad$ $-2 < x'' = x' = \frac{3}{2} < 4$

۳- $\frac{2}{25} < m < 2$ $\qquad$ معادله جواب ندارد

۴- $2 < m < 4$ $\qquad$ $x'' < -2 < 4 < x'$

۵- $m = 4$ $\qquad$ $x'' = -2 < 4 < x'$

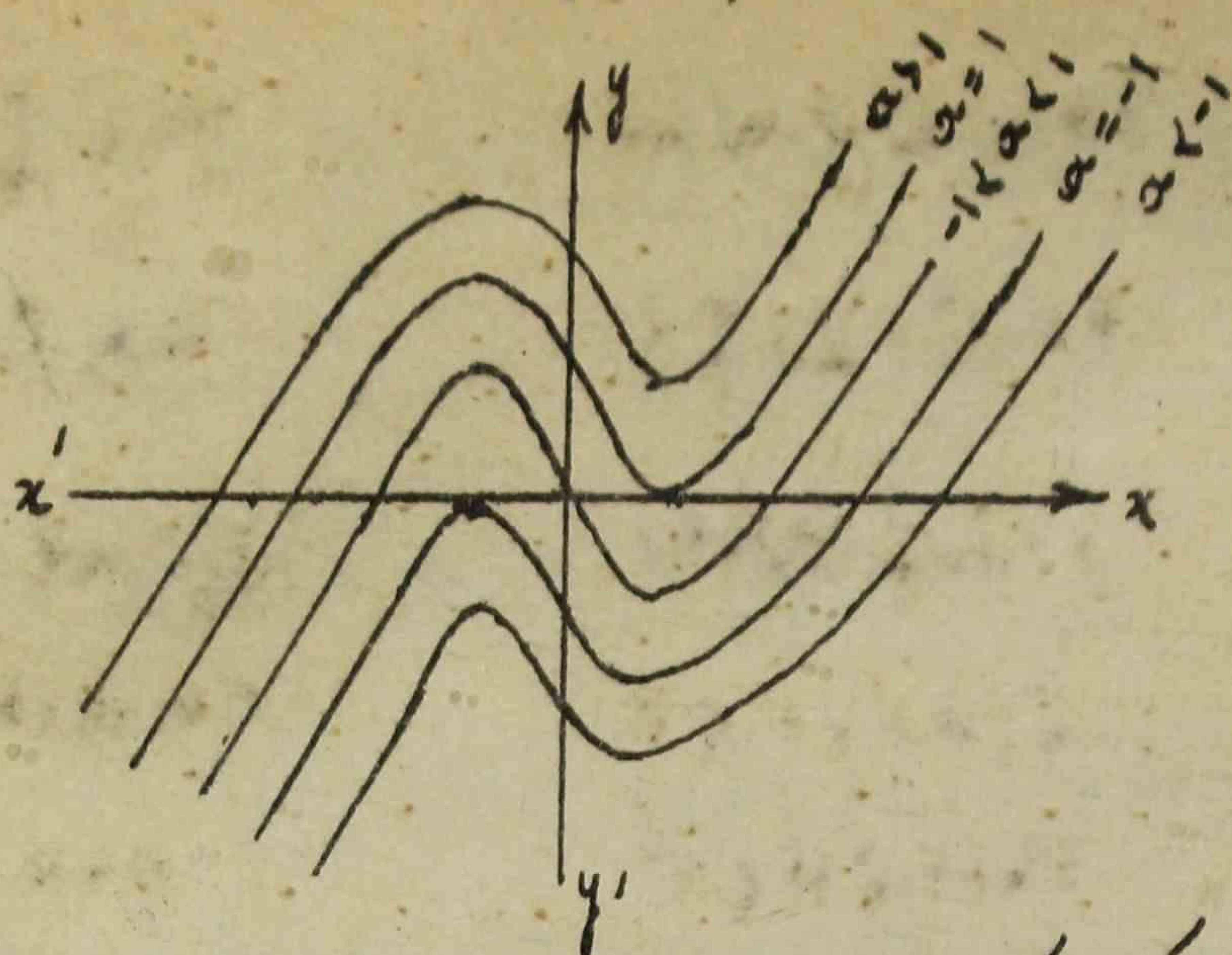
۶- $m > 4$ $\qquad$ $-2 < x'' < 4 < x'$

مسئله ۲ - جدول و منحنی تغییرات تابع $y = 4x^3 - 3x + a$ را رسم نموده و در عدهٔ جوابهای معادلهٔ $4x^3 - 3x + a = 0$ برحسب مقادیر پارامتر a بحث کنید

چون جدول تغییرات تابع فوق را رسم کنیم حاصل میشود

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$a+1$	$\searrow$	a	$\searrow$	$a-1$	$\nearrow$	$+\infty$
			Max				min		

که برحسب آنکه به a مقادیر $a < -1$ و $a = -1$ و $-1 < a < 1$ و $a = 1$ و $a > 1$ را بدهیم منحنیهای ذیل بدست میاید :



حال چون ملاحظه کنیم که ریشه های معادلهٔ $4x^3-3x+a=0$ طول نقاط تقاطع منحنی با محور $x'x$ میباشد بنابراین عدهٔ ریشه های معادله فوق بازاء مقادیر a بقرار ذیل خواهد بود :

۱- $a<-1$ یک ریشه

۲- $a=-1$ یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده

۳- $-1<a<1$ سه ریشه

۴- $a=1$ یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده

۵- $a>1$ یک ریشه

طریقه مستقیم برای تعیین ماکزیموم و مینیموم بعضی توابع

۷۷ - همواره میتوان بدون استعمال مشتق ماکزیموم و مینیموم بعضی توابع را تعیین نمود از ینقرار :



مسئله ۱ – مطلوبست تعیین ماکزیموم و مینیموم تابع $y = \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$ بدون استعمال مشتق

تابع فوق را نسبت به x مرتب میکنیم تا حاصل شود :

$$(y-1)x^2-2x(y+1)+3(y+1)=0$$

حال ریشه های معادلهٔ فوق عبارتست از طول نقاط تقاطع خط بعرض y با منحنی مفروض و چون در نقاط ماکزیموم و مینیموم خط بعرض y بر منحنی مماس است بنابراین ماکزیموم و مینیموم تابع مقادیری از y میباشند که بازاء آنها معادله درجهٔ دوم فوق دارای ریشهٔ مضاعف میباشد از اینقرار برای بدست آوردن ماکزیموم و مینیموم تابع در معادلهٔ درجهٔ دوّم فوق Δ را مساوی صفر قرار میدهیم تا حاصل شود :

$$\Delta=(y+1)^2-3(y^2-1)=-2(y^2-y-2)$$

که ریشه های آن عبارتست از $y'=2$ و $y''=-1$ و برای آنکه $\Delta\geq 0$ باشد لازم است $-1\leq y\leq 2$ باشد بطوریکه 2 و -1 بترتیب ماکزیموم و مینیموم تابع مفروض میباشند

مسئله ۲ – ماکزیموم یا مینیموم تابع $y = \frac{3x^2+2x-5}{(x+1)^2}$ را تعیین کنید

معادله را نسبت به x مرتب میکنیم در اینصورت حاصل میشود :

$$(y-3)x^2 - 2x(1-y) + y + 5 = 0$$

که چون در آن Δ را تشکیل داده مساوی صفر قرار دهیم نتیجه میشود :

$$\Delta = (1-y)^2 - (y-3)(y+5) = 4(4-y)$$

و از آنجا $y = 4$ بطوریکه از رابطهٔ $\Delta \geq 0$ حاصل میشود $y \leq 4$

از اینقرار تابع مفروض فقط دارای ماکزیمومی است مساوی ۴

مسئله ۳ ـ معلوم کنید آیا تابع $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$ دارای ماکزیموم یا مینیموم میباشد یا خیر

معادلهٔ مفروض را نسبت به x مرتب میکنیم تا حاصل شود :

$$x^2 - x(y+1) + y - 4 = 0$$

که چون در آن Δ را مساوی صفر قرار دهیم نتیجه میشود :

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y-4) = y^2 - 2y + 17$$

که دارای جواب نمیباشد بنابراین y حدود معینی را دارا نبوده تابع مفروض نه دارای ماکزیموم است و نه مینیموم

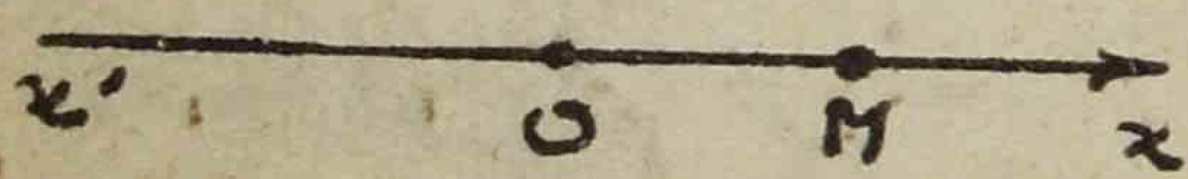


موارد استعمال مشتق در حرکات *

۷۸ - **تعریف** - نقطه را نسبت بدستگاه مقایسه در حرکت گویند هرگاه وضعیت نسبی آن نسبت بدستگاه مفروض تغییر کند

۷۹ - **مسیر نقطه - حرکت مستقیم الخط و حرکت منحنی** - مکان نقاطی را که نقطه متحرک در فضا طی مینماید مسیر متحرک مینامند و بر حسب آنکه مسیر نقطه خط مستقیم یا منحنی باشد حرکت را مستقیم الخط یا منحنی گویند

۸۰ - **معادلهٔ حرکت** - هرگاه فرض کنیم محور $x'x$ مسیر نقطه متحرک M باشد چون نقطه ثابتی مانند O در روی مسیر فوق



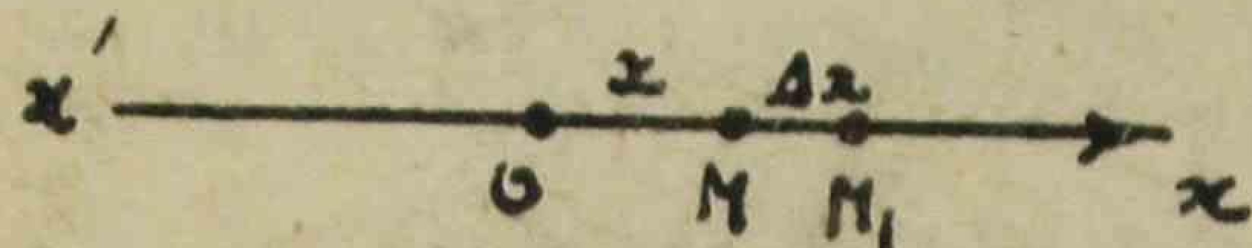
فرض کنیم فاصلهٔ OM تابعی از زمان خواهد بود که چون آنرا x فرض کنیم حاصل میشود $x = f(t)$ معادلهٔ $x = f(t)$ را معادله حرکت گویند

هرگاه علاوه بر مسیر متحرک M معادلهٔ حرکت آن $x = f(t)$ در دست باشد موضع متحرک در هر زمان در روی مسیر خود بدست میآید چه هر زمان را که در معادله فوق قرار دهیم x نظیر آن حساب شده و مکان نقطه M در روی مسیر مشخص میگردد

---

* چون در پرگرام مکانیک این مبحث بقدر کافی مورد بحث واقع میگردد لذا در اینجا بذکر مختصری از حرکت مستقیم نقطه اکتفا مینمائیم

۸۱ - **سرعت** - فرض میکنیم $x = f(t)$ معادلهٔ حرکت نقطه M



در روی محور $x'x$ باشد حال اگر موضع متحرک را در زمان t در نقطه M بفاصلهٔ

$\overline{OM} = x$ و در زمان $t + \Delta t$ در نقطه M_1 بفاصله $x + \Delta x = \overline{OM_1}$

فرض کنیم نسبت $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ را سرعت متوسط نقطه M در فاصله

MM_1 و یا در فاصلهٔ زمانی Δt بعد از زمان t مینامند و آنرا باینصورت

مینویسند $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

حال اگر فرض کنیم Δt میل کند بسمت صفر نقطه M_1 میل میکند بسمت M

و چون x تابعی است از زمان حد نسبت فوق عبارت میگردد از $x' = \frac{dx}{dt}$

ولی چون نسبت مزبور همواره سرعت متوسط متحرک در فاصله MM_1 میباشد لذا

حد آن سرعت متحرک در نقطه M خواهد بود که چون آنرا v فرض کنیم حاصل میشود $v = \frac{dx}{dt}$

سرعت نقطه M را عموماً بحاملی نمایش میدهند که مبدأ آن M و امتداد

جهت آن امتداد و جهت حرکت و کمیت آن مساوی $\frac{dx}{dt}$ باشد

۸۲ - **حرکت مستقیم و معکوس** - **تعیین جهت حرکت از روی علامت سرعت** - هرگاه نقطه M در جهت محور $x'x$ حرکت کند حرکت آنرا



مستقیم و اگر در خلاف جهت محور حرکت نماید حرکت آنرا معکوس گویند

حال ملاحظه میکنیم که در حرکت مستقیم x بحسب زمان تابع صعودی و بنابراین

v مثبت و در حرکت معکوس x بحسب زمان نزولی و بنابراین v منفی

میباشد بطوریکه برای تحقیق آنکه حرکت نقطه درچه فاصلهٔ زمانی مستقیم

و درچه فاصلهٔ زمانی معکوس میباشد کافیست که علامت سرعت را که مشتق

معادله حرکت است تحقیق نمائیم در هر فاصلهٔ که سرعت مثبت باشد

حرکت مستقیم و در هر فاصلهٔ که منفی باشد حرکت معکوس خواهد بود ضمناً

زمانی که سرعت تغییر علامت میدهد زمانی است که متحرک در حرکت خود تغییر

جهت میدهد

۸۳- **حرکت متشابه و حرکت متغیر** - هرگاه سرعت نقطه ثابت

باشد حرکت را متشابه و اگر برحسب زمان تغییر کند حرکت را متغیر گویند

چون سرعت مشتق معادله حرکت است بنابراین نتیجه میشود

که معادله حرکت متشابه برحسب زمان تابعی است از درجهٔ اول بطوریکه

اگر سرعت ثابت متحرک را v فرض میکنیم معادله حرکت بصورت

$x = vt + x_0$ خواهد بود (x_0 مقداریست ثابت که

برای تعیین آن در معادلهٔ فوق فرض میکنیم $t=0$ باشد در این صورت $x=x_0$ میگردد یعنی x_0 عبارت است از طول نقطه M در زمان $t=0$ بنابراین اگر فرض کنیم متحرکی با سرعت ثابت v در زمان $t=0$ از مبدأ O حرکت نماید معادلهٔ حرکت آن بصورت $x=vt$ خواهد بود

۸۴- **شتاب** - فرض میکنیم موضع متحرک در زمان t در نقطه M و سرعت آن در این زمان v و در زمان $t+\Delta t$ در نقطه M_1 و سرعت آن در این زمان $v+\Delta v$ باشد در اینصورت نسبت $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ را شتاب متوسط در فاصلهٔ MM_1 و یا در فاصلهٔ زمانی Δt بعد از زمان t مینامند و آن را باین صورت مینویسند :

$$\gamma_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

حال اگر فرض کنیم Δt میل کند بسمت صفر نقطه M_1 میل میکند بسمت M وحدّ نسبت فوق چون v تابعی است از t عبارت میگردد از $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v'$ که آنرا شتاب متحرک در زمان t و یا در نقطهٔ M مینامند

از اینقرار مشتق اول معادلهٔ $x = f(t)$ معادله سرعت و مشتق ثانی آن معادله شتاب خواهد بود

۸۵ - **حرکت مسرعه و حرکت مبطئه** — در حرکت متغیر هرگاه قدر مطلق سرعت ترقی کند حرکت را مسرعه و اگر تنزل نماید حرکت را مبطئه گویند

حال بنا بتعریف فوق در حرکت مسرعه v^2 برحسب زمان تابع صعودی و در حرکت مبطئه v^2 برحسب زمان تابع نزولی میباشد بطوریکه برای تحقیق آنکه حرکت نقطه درچه زمان مسرعه و درچه زمان مبطئه است کافی است معلوم کنیم که تابع $y = v^2$ درچه زمان صعودی و درچه زمان نزولی است و چون مشتق آن $y' = 2vv' = 2v \times \gamma$ میباشد بنابراین کافی است که علامت $v \times \gamma$ را تحقیق کنیم دراینصورت در هر فاصلهٔ زمانی که $v \times \gamma$ مثبت باشد حرکت مسرعه و در هر زمان منفی باشد حرکت مبطئه خواهد بود.

۸۶ - **بحث در حرکت نقطه** — هرگاه فرض کنیم که محور $x'x$ مسیر نقطه متحرک M باشد مقصود از بحث در حرکت نقطه آنست که درصورت معلوم

بودن معادلهٔ حرکت آن $x = f(t)$ تحقیق کنیم در چه زمان حرکت مستقیم یا معکوس و در چه زمان سرعه یا مبطئه است و بطوریکه گفتیم این مقصود با تحقیق علامت v و علامت $\gamma \times v$ بدست میآید

۸۷- دیاگرام حرکت و سرعت و شتاب — چون در معادلات $x = f(t)$ و $v = f'(t)$ و $\gamma = f''(t)$ متغیر را زمان و x و v و γ را تابع آن فرض نموده نمایش هندسی تغییرات توابع فوق را رسم کنیم خطوطی حاصل میشود که آنها را دیاگرام حرکت و سرعت و شتاب مینامند و از روی آنها همواره ممکن است در هر زمان x و v و γ را بوسیلهٔ ترسیم بدست آورد

برای توضیح مطالب فوق مثال ذیل را حل میکنیم :

مثال — مطلوبست بحث در حرکت مستقیم الخط $x = t^3 - 3t$ و رسم دیاگرام حرکت و سرعت و شتاب

معادلهٔ سرعت $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 3$ و معادلهٔ شتاب $\gamma = \frac{dv}{dt} = 6t$ میباشد که جوابهای هر یک را تعیین میکنیم و علامت آنها و همچنین علامت $\gamma \times v$ را در فواصل جوابها در جدول ذیل ترتیب داده

و از مقایسه آنها بحث مطلوب را نتیجه میگیریم ازینقرار :

t	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
v		+	0	−		−	0	+	
γ		−		−	0	+		+	
vγ		−	0	+	0	−	0	+	
نتیجه		مستقیم - مبطئه		معکوس - مسرعه		معکوس - مبطئه		مستقیم - مسرعه	

حال برای رسم دیاگرام حرکت منحنی تغییرات توابع $x = t^3 - 3t$ و

$v = 3t^2 - 3$ و $\gamma = 6t$ را رسم میکنیم

از روی دیاگرام فوق همواره میتوان

x و v و γ را در هر زمان بدست

آورد مثلاً چون در روی محور t't

طول $OP = \frac{1}{2}$ را جدا نموده و از

نقطه P عمودی بر محور t't اخراج کنیم تا خطوط فوق را در نقاط A و

B و C قطع نماید PA نماینده طول نقطه و PB نماینده سرعت آن

و PC نماینده شتاب متحرک در زمان $t = \frac{1}{2}$ میباشد بطوریکه هرگاه

محور x'x مسیر متحرک باشد وضع نقطه M در این زمان بصورتی است

که در شکل ملاحظه میشود



۸۸- حرکت متشابه التغییر - هرگاه در حرکت متغیری شتاب ثابت باشد حرکت را متشابه التغییر مینامند

ازینقرار هرگاه شتاب حرکتی ثابت و مساوی γ باشد معادلهٔ سرعت آن $v=\gamma t+v_0$ و معادلهٔ حرکت آن $x=\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0t+x_0$ خواهد بود.

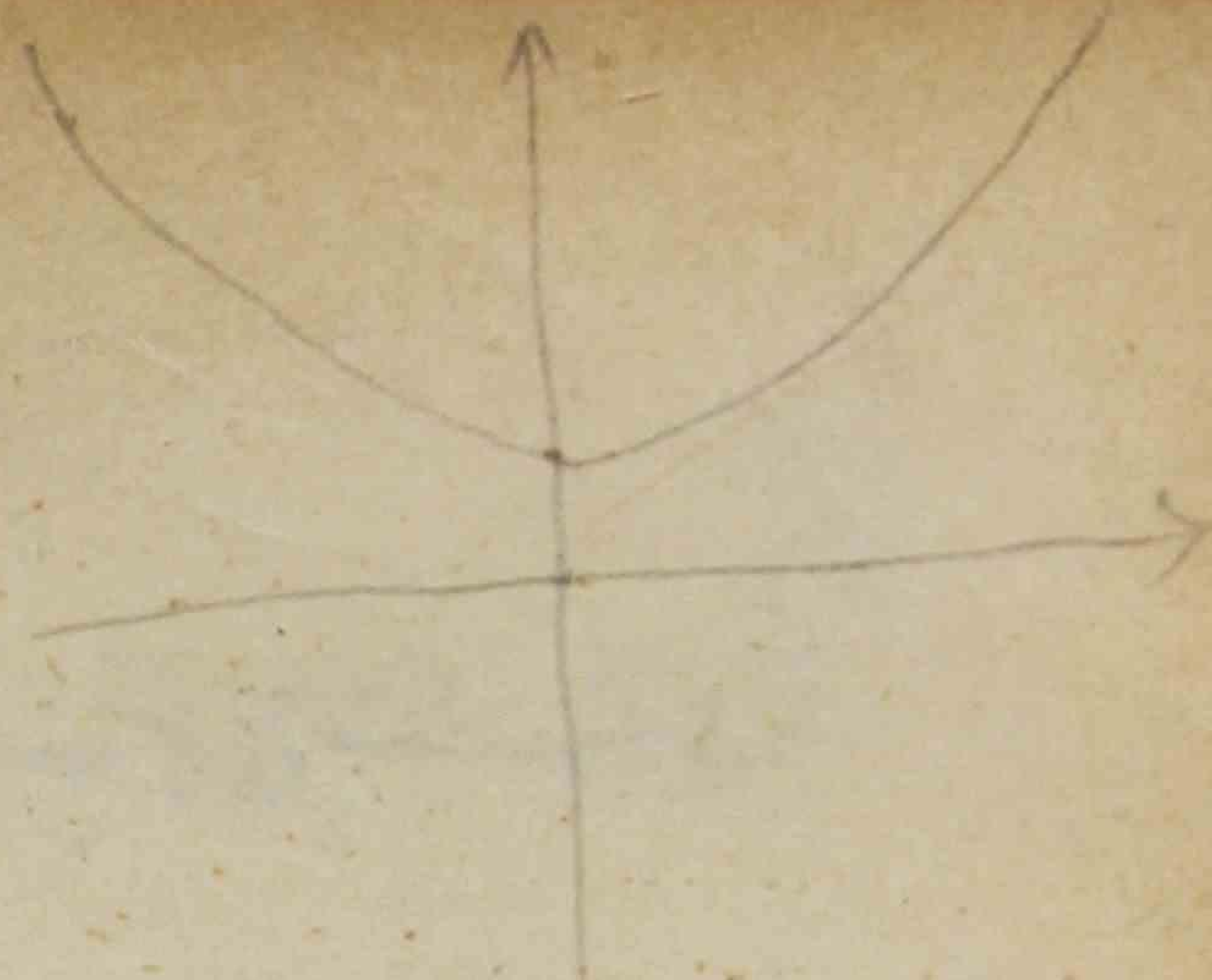
(v_0 و x_0 مقادیر ثابته هستند که برای محاسبهٔ آنها در معادلات سرعت و حرکت نقطه M ، t را مساوی صفر قرار میدهیم در اینصورت نتیجه میشود $v=v_0$ و $x=x_0$ یعنی v_0 و x_0 بترتیب سرعت و طول متحرک در زمان $t=0$ میباشد بطوریکه اگر فرض کنیم متحرکی در زمان $t=0$ از مبدأ O بدون سرعت اولیه و با شتاب γ حرکت نماید معادلهٔ سرعت آن $v=\gamma t$ و معادلهٔ حرکت آن $x=\frac{1}{2}\gamma t^2$ خواهد بود)

مثال حرکت متشابه التغییر - حرکت اجسام در تحت تأثیر قوهٔ ثقل حرکت متشابه التغییر یست با شتاب ثابتی که آنرا g فرض مینمایند و مقدار آن در طهران ۹٫۷۹ متر و در پاریس ۹٫۸۱ متر میباشد بنابراین چون جسمی را بطور آزاد رها کنیم در امتداد قائم ساقط میشود و معادلهٔ حرکت آن بصورت $x=\frac{1}{2}gt^2$ میباشد و درصورتیکه آنرا با سرعت v_0 در امتداد قائم پرتاب کنیم معادلهٔ حرکت آن بصورت $x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$ خواهد بود.

$y = 2x^2 - 1$

$y' = 4x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	−	0	+
y	$+\infty$ ↘	−1	↗ $+\infty$



مسائل

۸۳ - جدول و منحنی تغییرات توابع ذیل را رسم کنید : و با کمک [illegible] این توابع را [illegible]

$y' = 6x + 5 = 0$

$6x + 5 = 0$

$x = -\frac{5}{6}$

$y = 2x^2 - 1$ $\qquad$ $y = 3x^2 + 5x - 8$

$y = x^2 - 8x + 12$ $\qquad$ $y = -5x^2 + 13x - 7$

$y = \frac{-2x + 5}{3x + 7}$ $\qquad$ $y = \frac{-5}{3x - 4}$ — ۸۴

x	$-\infty$	$-\frac{5}{6}$	$+\infty$
y'	−	0	+
y	$+\infty$ ↘		

$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad$ $y = x^4 + 2x^2 - 8$

$y = \frac{1}{x^4 + 2x^2 - 8}$ $\qquad$ $y = -4x^4 + 5x^2 - 1$

$y = (x-2)^2(x+3)(x-4)$ $\qquad$ $y = x(x-1)^2$ — ۸۵

$y = x(a^2 - x^2)$ $\qquad$ $y = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}$

$y = \frac{1}{3 - 2x^2 + x^4}$ $\qquad$ $y = \frac{x^2 - 4x - a^2}{x^2 + 8x + a^2}$

$y = \frac{x^3}{x + 1}$ $\qquad$ $y = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^3}$ — ۸۶

$y = \frac{(x+2)^2}{(x+4)^3}$ $\qquad$ $y = \frac{x^2 - 29x + 100}{x^2 - 22x + 121}$

$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{4x - 4}$ $\qquad$ $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x - 3}$



۸۷- $y=\dfrac{2x^3-10x+9}{3x-1}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x-1}{x^2+2x+5}$

$y=\dfrac{x^4+x^2-1}{x^4+4x^2+1}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+3}$

$y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x+2}$

۸۸- $y=\sqrt{x^2-5x+4}$ $\qquad$ $y=\sqrt{x-1}$

$y=\sqrt{2x(x-3)}$ $\qquad$ $y=\sqrt{x(x-1)}$

$y=2(x+1)+3\sqrt{-x^2-x+6}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

۸۹- $y=(2x-1)(x-1)^2(x+5)^3$ $\qquad$ $y=\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{b+x}{b-x}$

$y=\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad$ $y=(4-x)^2\sqrt{(2-3x)^3}$

$y=x-1+\sqrt{(m-1)x^2-2mx+m}$ $\qquad$ $y=x^3(a-x)^2$

۹۰- $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x^2-5}{\sqrt{x^4-x^2}}$

$y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

۹۱- $y=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ $\qquad$ $y=\sqrt{\dfrac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}}$

$y=\sqrt{5+3x}-\sqrt{2x-7}$ $\qquad$ $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

$y=(x^2-2x-1)\sqrt{x^2+2x-1}$ $\qquad$ $y=(1-x)(2+x)^{\frac{2}{3}}$

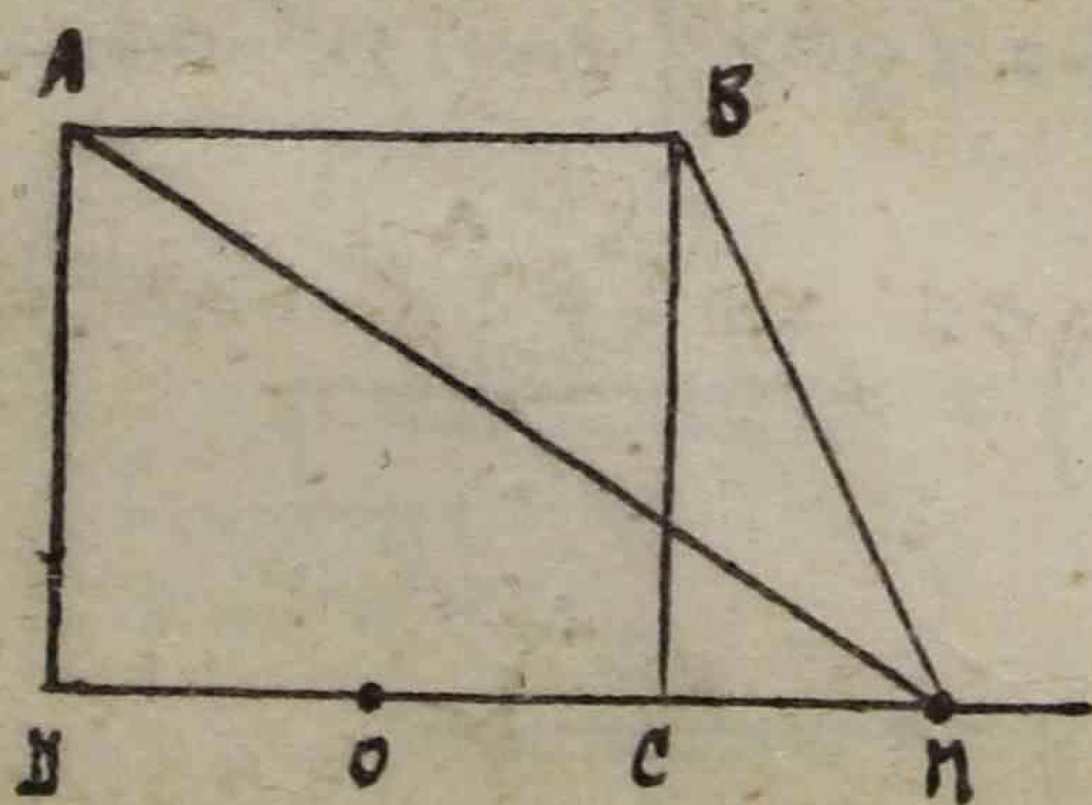


۹۲ - مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x^2 - 4x + 9$
ثانیاً خطی موازی منصف الزاویه xOy محور $y'y$ را در نقطه بعرض a قطع میکند
معادله این خط را تعیین کنید ثالثاً در عدهٔ نقاط تقاطع این خط با منحنی بحث کنید

۹۳ - تابع $y = -x^2 + 5x - 4$ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آنرا رسم
کنید ثانیاً مطلوبست معادلات خطوطی که از مبدأ بر منحنی فوق مماس گردد و همچنین زاویه حادهٔ
مابین دو مماس و معادله خط واصل مابین نقاط تماس را تعیین نمائید

۹۴ - مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$
ثانیاً خط $y = mx$ مفروض است مقدار m را بطریقی تعیین کنید که خط منحنی را
در دو نقطه قطع نموده و یا بر آن مماس گردد

۹۵ - مربع $ABCD$ بضلع a مفروض است در امتداد DC نقطه متغیری



مانند M اختیار نموده و فرض میکنیم
نقطه O وسط DC و $OM = x$ باشد
مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات

$$y = \frac{MA^2}{MB^2}$$ و

تعیین مقدار x بطریقی که نسبت فوق ماکزیموم باشد

۹۶ - اولاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x + 1 + \frac{1}{x}$ را رسم کنید
ثانیاً خط $x + y = a$ را فرض میکنیم مطلوبست بحث در نقاط تقاطع این خط

با منحنی برحسب مقادیر a

$(y-1)x^2-2$

۹۷ - معادلهٔ درجهٔ دوم $(y-1)x^2-2yx+y+2=0$

مفروض است مطلوبست اولاً مقایسه ریشه‌های آن با ۲ و ۱- برحسب مقادیر y

ثانیاً معادله را نسبت به y حل نموده جدول و منحنی تغییرات تابع حاصل را رسم کنید و از

روی آن بحث فوق را نتیجه بگیرید

۹۸ - مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

ثانیاً خطی موازی محور xx' منحنی را در دو نقطه قطع مینماید وضعیت خط را مشخص نمائید

برای آنکه نقاط تقاطع بفاصلهٔ معینی از یکدیگر واقع باشند

۹۹ - دو محور قائم ox و oy و دائره بشعاع R و بمرکز A واقعه در روی ox مفروض

است بطوریکه $OA=a$ میباشد مماس BC را بر دایره رسم میکنیم تا oy را

در نقطهٔ B و ox را در نقطهٔ C قطع نماید و فرض میکنیم $OC=x$ باشد در اینصورت

مطلوبست تغییرات S سطح مثلث OBC هرگاه x تغییر کند با بر آنکه $R=6a$

فرض شود

۱۰۰ - جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$ را رسم نموده و در عدهٔ

جوابهای معادلهٔ $ax^2(x-1)-(x-2)^2=0$ برحسب مقادیر پارامتر

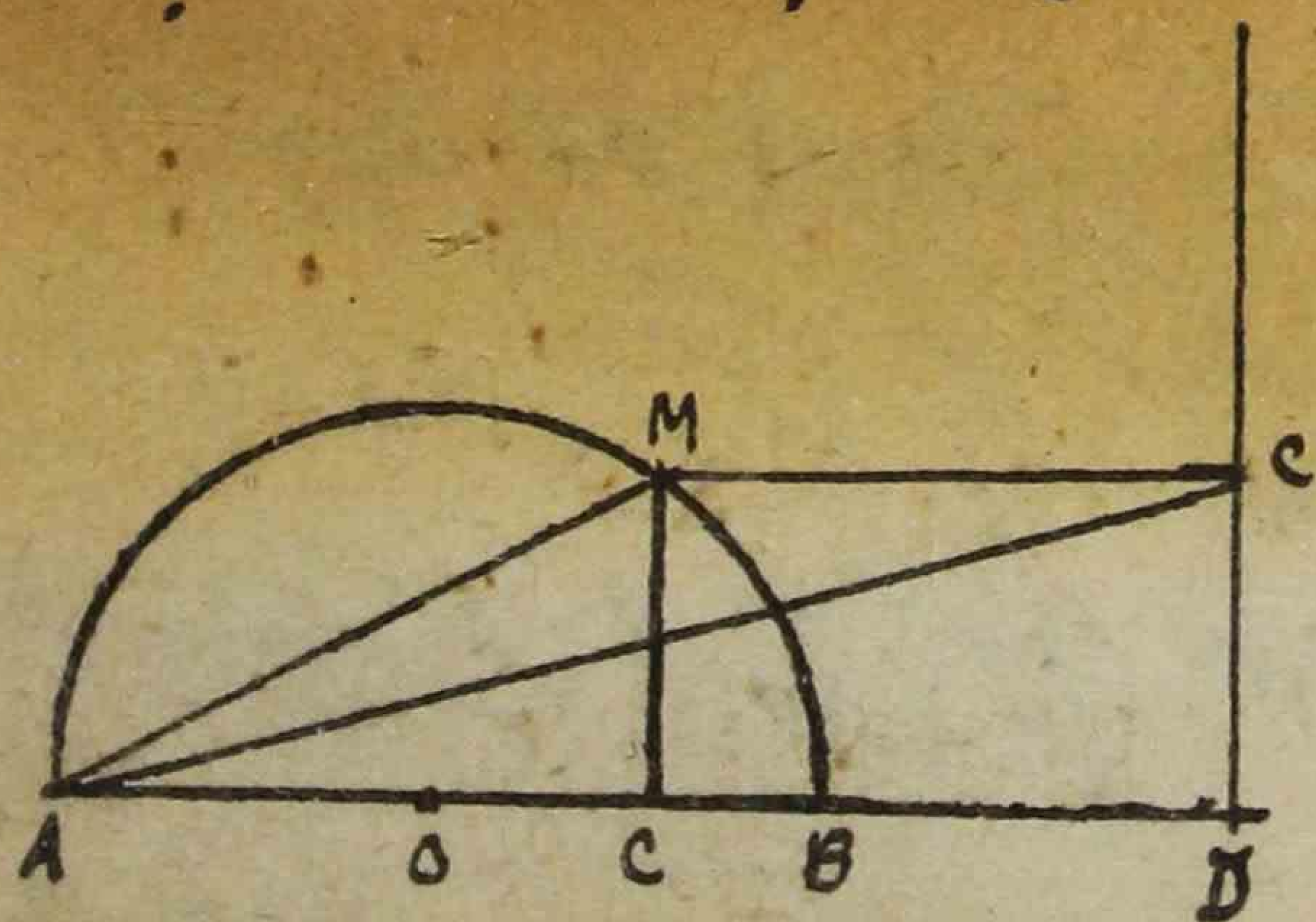
a بحث کنید

۱۰۱ - تابع $y=\frac{1}{x-1}-\frac{[illegible]}{x-2}$ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آن را

رسم کنید ثانیاً معادله $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} = m$ را فرض میکنیم در وجود و علامت ریشه های آن برحسب مقادیر m بحث نموده و این بحث را با منحنی فوق تطبیق نمائید ثالثاً هرگاه x' و x'' ریشه های معادله فوق باشند مابین آنها رابطه تعیین کنید که بستگی بمقدار m نداشته باشد

۱۱۲- سه جمله $y = mx^2 + (1-2m)x + 2m$ مفروض است اولاً مقدار x را حساب کنید که بازاء آن $y' = 1$ باشد ثانیاً هرگاه x راجواب مشتق فرض نموده و مقدار نظیر آنرا برای تابع y فرض کنیم مطلوبست محاسبه x و y برحسب m و همچنین محاسبه y برحسب x و رسم جدول و منحنی تغییرات y هرگاه x تغییر کند

۱۱۳- نیم دایره بمرکز O و بقطر $AB = 2R$ و نقطه D واقعه بر امتداد AB بفاصله $OD = 2R$ مفروض است



از نقطه D عمودی بر AB اخراج نموده و نقطه مانند M بر محیط نیم دایره اختیار میکنیم و از این نقطه MC را بر خط مفروض عمود مینمائیم مطلوبست اولاً تغییرات سطح مثلث AMC هرگاه M محیط نیم دایره را طی کند ثانیاً وضعیت نقطه M نظیر ماکزیموم سطح فوق را بوسیله ترسیم مشخص نمائید

۱۱۴- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^2 - 4x - 4}{8}$

ثانیاً تعیین نقطه از منحنی که مماس بر آن با جهت ox زاویه ۴۵ تشکیل دهد

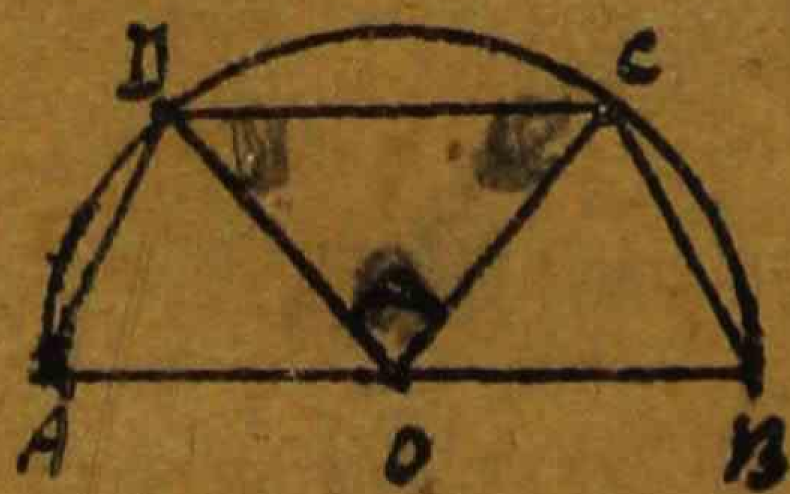


ثالثاً تحقیق کنید که خطی موازی ox میتوان بدست آورد بطریقی که فاصله هر نقطه از منحنی مانند M از آن خط و از نقطه ثابت $F(2,1)$ مساوی باشد

۱۰۵- تابع $y = \frac{x^2-x}{x-2}$ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آنرا رسم کنید ثانیاً هرگاه y مقدار معلومی فرض شود معادله فوق را نسبت به x مرتب نموده در وجود و علامات ریشه های آن بحث کنید ثالثاً هرگاه فرض کنیم خط D موازی محور $x'x$ خط $x=2$ را در نقطه A و منحنی را در نقاط M' و M'' قطع کند ثابت کنید که $\overline{AM'} \times \overline{AM''}$ هرگاه D بموازات خود حرکت کند مقداریست ثابت

۱۰۶- دو خط $2x-3y=4$ و $m(x-y)=1$ مفروض است مطلوبست اولاً محاسبه مختصات نقطه A محل تقاطع دو خط برحسب m ثانیاً رسم جدول و منحنی تغییرات ضریب زاویه خط OA هرگاه m از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ثالثاً تحقیق کنید که هر خط موازی منصف الزاویه xOy منحنی را در دو نقطه قطع میکند و حساب کنید عرض از مبدأ خط مزبور را بطریقی که هرگاه نقاط M و M' محل تقاطع خط با منحنی و نقطه Q نقطه تقاطع آن با محور $y'y$ باشد نقاط M و M' نسبت به Q قرینه باشند

۱۰۷- نیمدایره بمرکز O و بقطر $AB=2R$ و ذوزنقه $ABCD$ محاط در آن مفروض است مطلوب است اولاً محاسبه سطح این ذوزنقه برحسب R و $\frac{CD}{2}=x$ و تغییرات آن هرگاه x تغییر کند





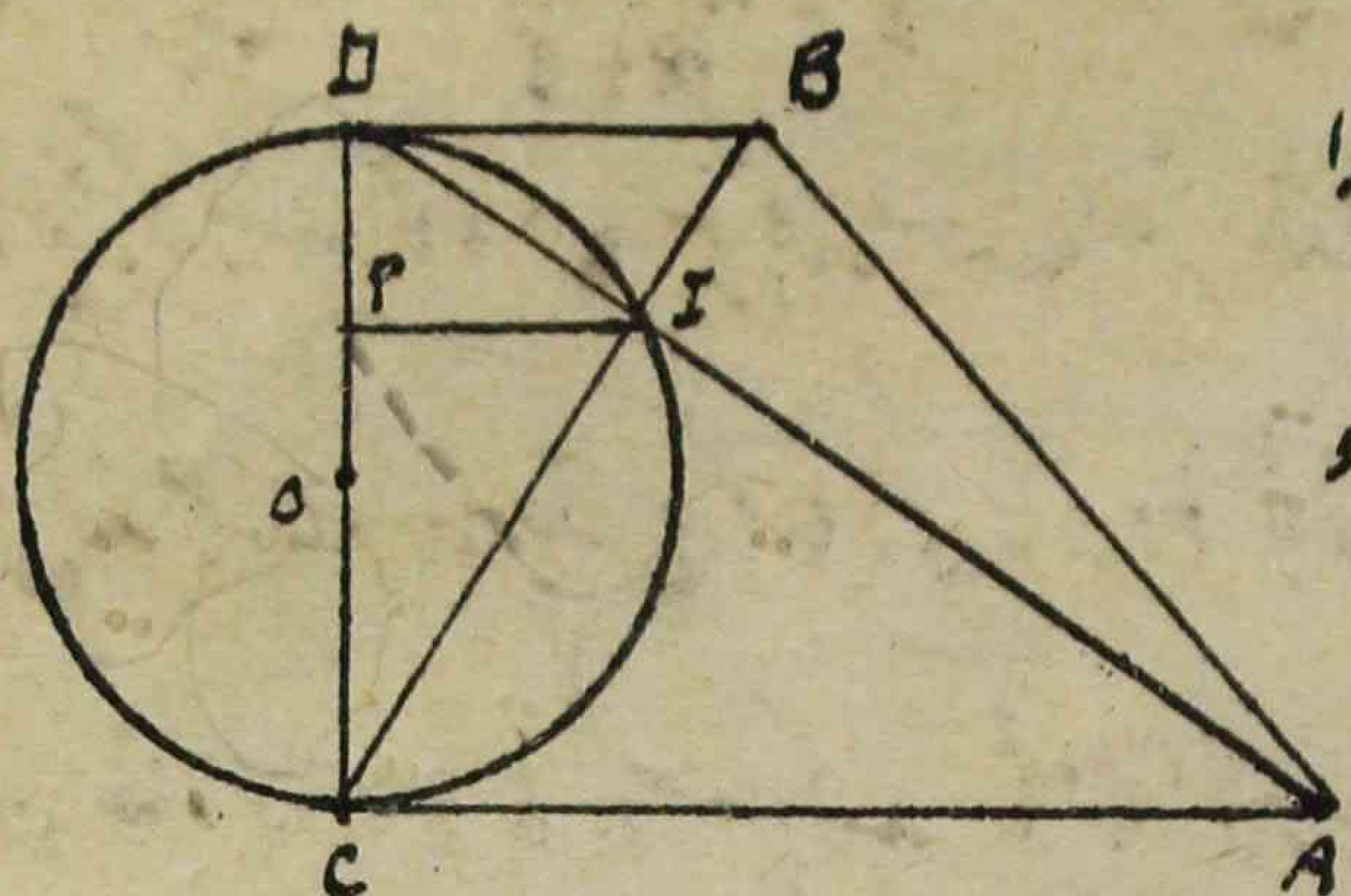
ثانیاً مطلوبست زاویه مرکزی $\widehat{COD}$ نظیر ماکزیموم این سطح

۱۰۸- تابع $y = \frac{ax+1}{x+b}$ مفروض است مطلوبست اولاً محاسبهٔ a و b بطریقی که هرگاه x میل کند بسمت صفر مقدار y میل کند بسمت ∞ وهمچنین اگر x میل کند بسمت ∞ حد y مساوی ۲ گردد ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع را بازاء این مقادیر a و b رسم کنید ثالثاً مطلوبست محاسبهٔ مختصات نقاطی از منحنی فوق که مماس بر آنها باخط $y = -4x$ موازی باشد

۱۰۹- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ و تابع $y = \frac{l(x-1)}{x+1}$ ثانیاً دو منحنی یکدیگر را در نقاط A و B قطع میکنند مطلوبست مختصات A و B و بحث در وجود آنها برحسب مقادیر l ثالثاً معادلهٔ خط AB را تشکیل داده تحقیق کنید که خط مزبور بازاء جمیع مقادیر l بر نقطه ثابتی مرور مینماید رابعاً مطلوبست مقدار l بطریقی که مختصات نقاط A و B مقادیر منطق باشند

۱۱۰- تابع $y = x^3 + \frac{1}{x}$ که در آن x نمایش مقدار مثبتی است مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آنرا رسم کنید ثانیاً هرگاه M یکی از نقاط منحنی و MT مماس بر آن و نقطه T نقطه تقاطع مماس با محور $x'x$ و MA عمود وارد از M بر $x'x$ باشد طول نقطه M را حساب کنید بطریقی که $MA = \frac{3}{2} AT$ باشد

۱۱۱- دایرهٔ O بشعاع R و دو مماس موازی CA و DB مفروض است نقطه



P را در روی قطر CD واصل بین دو نقطه
تماس فرض نموده از نقطه P عمود PI را
بر قطر اخراج میکنیم و قاطع CIB و
BIA و خط AB را رسم میکنیم
مطلوبست تغییرات سطح ذوزنقه ABCD

۱۲۲- تابع $y = \frac{x^2+ax+b}{x^2}$ مفروض است اولاً مقدار a و b را بطریقی تعیین کنید که تابع بازاء $x = \frac{8}{5}$ دارای ماکزیمومی مساوی $\frac{25}{16}$ باشد ثانیاً جدول ومنحنی تغییرات تابع را بازاء $a=3$ و $b=-4$ رسم کنید ثالثاً خط $y = m$ موازی محور $x'x$ مفروض است در نقاط تقاطع این خط با منحنی بحث کنید رابعاً هرگاه خط $y = m$ منحنی را در دو نقطه M و M' قطع کند مطلوبست تعیین m بطریقی که زاویه $M\hat{O}M'$ قائمه باشد

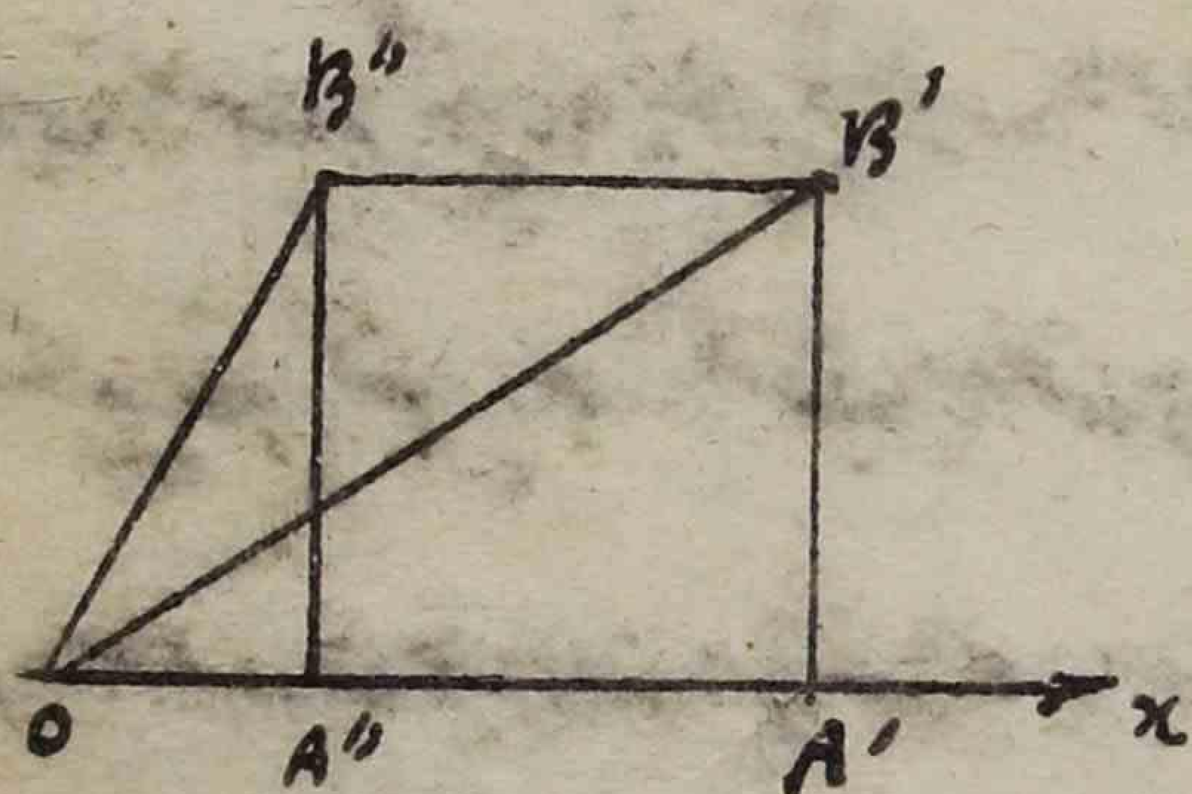
۱۲۳- معادلهٔ $tg^2x - 2(\lambda-1)\,tg\,x + 2\lambda + 1 = 0$ که در آن $tg\,x$ مجهول و λ نمایش پارامتریست مفروض است مطلوبست اولاً بحث در وجود و علامت ریشه‌های آن برحسب مقادیر λ ثانیاً هرگاه فرض میکنیم $tg\,B$ و $tg\,C$ ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات $y = tg(B+C)$ ثالثاً فرض کنیم B و C زوایای مثلثی باشند مقدار λ را بطریقی تعیین کنید که مثلث قائم الزاویه باشد

۱۱۴- معادله درجه دوم $ax^2+(a-1)x-(a+1)=0$

مفروض است مطلوبست اولاً بحث در وجود ریشه‌های آن ثانیاً هرگاه معادله

دارای ریشه‌های حقیقی باشد محوری مانند ox فرض نموده از نقطه o طول OA'

را مساوی x' و OA'' را مساوی



x'' ریشه‌های معادله فوق جدا نموده

در روی $A'A''$ مربع $A'A''B''B'$ را

بنا کنیم مطلوبست تغییرات $y=\overline{OB'}^2+\overline{OB''}^2$ هرگاه a جمیع مقادیر ممکنه را

دارا شود

۱۱۵- تابع $y=\dfrac{x^2-6bx+4a}{4ax^2-6bx+1}$ که در آن a و b مختصات نقطه

M واقعه در سطح دو محور قائم میباشد مفروض است مطلوبست مکان نقطه M برای

آنکه تابع فوق نه دارای ماکزیموم و نه دارای مینیموم باشد

۱۱۶- تابع $y=\dfrac{x^2-3bx+2a}{2ax^2-3bx+1}$ مفروض است معلوم کنید مکان نقطه

$M(a, b)$ را برای آنکه منحنی تغییرات تابع فوق دارای یک ماکزیموم و مینیموم باشد

۱۱۷- تابع $y=\dfrac{x^2+2\lambda x+\mu}{x^2+1}$ مفروض است اولاً تحقیق کنید که دو نقطه

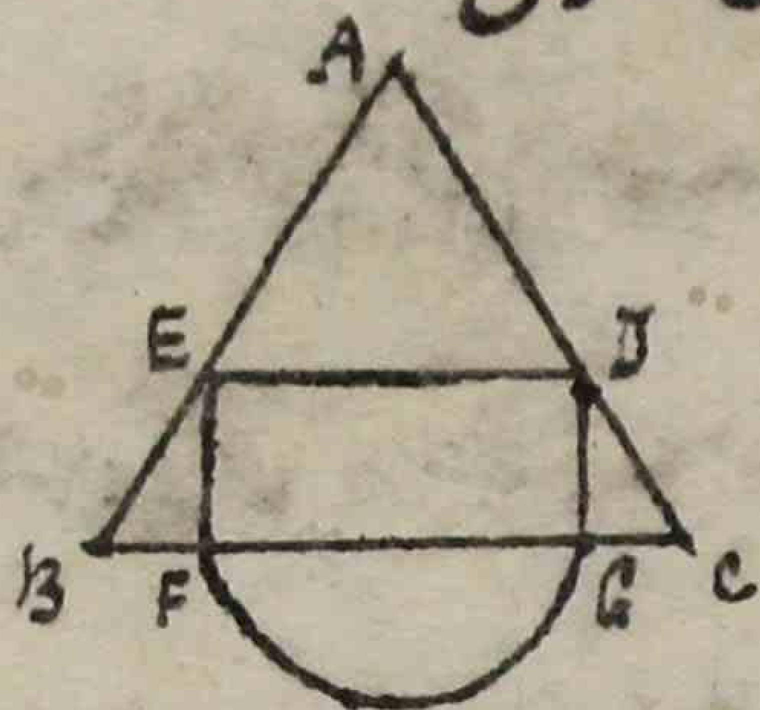
در روی منحنی یافت میشود که مماس برآنها با محور $x'x$ موازیست و ثابت کنید که حاصل

ضرب طول دو نقطه فوق x' و x'' برابر است با ۱- ثانیاً λ و μ را حساب کنید

بطریقی که بازاء $x=2$ $y=0$ و بازاء $x=1$ $y=2$

ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع فوق را بازاء این مقادیر ۱ و ۹ رسم کنید

۱۱۸- مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلع ا و مربع مستطیل DEFG محاط در آن



مفروض است در روی FG و در خارج مثلث

نیم دایره رسم میکنیم و با نیمشکل نیم دایره با مربع

مستطیل فوق تشکیل دوره کثیر الاضلاعی را

میدهد مطلوبست تغییرات سطح محدود بدوره فوق هرگاه R شعاع نیم دایره تغییر کند

۱۱۹- تابع $y = \frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}$ مفروض است مطلوبست اولاً رسم جدول و

منحنی تغییرات آن ثانیاً معادله و رسم مماس بر منحنی در نقطه $x=0$ ثالثاً خطی موازی

$x'x$ بعرض y منحنی را در نقاط بطول x' و x'' قطع مینماید مطلوبست محاسبه

$x'+x''$ و $x'x''$ برحسب y و اثبات آنکه $\frac{1}{x'+1} + \frac{1}{x''+1}$ ثابت و بستگی

بمقدار y ندارد

۱۲۰- اولاً ثابت کنید که مقداری مانند a یافت میشود بطوریکه بازاء هر مقدار m

بفرض آنکه $m<a$ باشد سه جمله $y = mx^2 + (m-1)x + m-1$

بازاء جمیع مقادیر x منفی باشد ثانیاً مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع

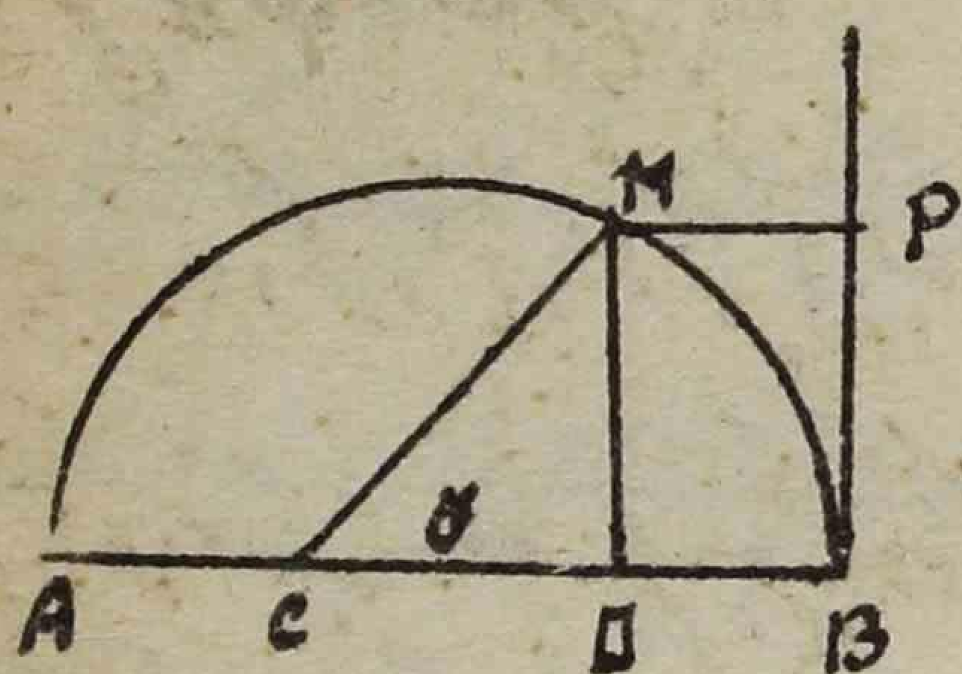
$$y = ax^2 + (a-1)x + a-1$$

۱۲۱- تابع $y = \frac{ax+1}{(x-1)^2}$ مفروض است اولاً مقدار a را بطریقی

تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطه $x=0$ با خط $x+4y=0$ موازی گردد

ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع را بازاء این مقدار a رسم کنید ثالثاً خط $y=m$ مفروض است مقدار m را بطریقی تعیین کنید که خط مزبور منحنی را در دو نقطه A' و A'' قطع نماید، همچنین مطلوبست محاسبهٔ مقدار m بطریقی که طول نقطه A وسط $A'A''$ مساوی مقدار معلوم ۳ گردد

۱۲۲- نیمدایره بمرکز O و بقطر $AB=2R$ و در روی قطر مزبور نقطهٔ C وسط OA مفروض است نقطه مانند M در روی نیمدایره فرض نموده MD را بر AB عمود میکنیم و فرض میکنیم $AD=x$ باشد



مطلوبست اولاً محاسبهٔ MC برحسب R و x ثانیاً MP را بر مماس بر نیمدایره در نقطه B عمود میکنیم مطلوبست تغییرات $y=\overline{MC}^2+\overline{MP}^2$ ثالثاً از روی منحنی فوق مقادیر x را بطریقی تعیین کنید که y مساوی مقدار معلوم l^2 باشد (بحث)

۱۲۳- تابع $y=x^2-2x+a$ مفروض است مطلوبست تعیین a برای آنکه اولاً منحنی با محور $x'x$ مماس گردد ثانیاً برای آنکه محور $y'y$ را در نقطه بعرض ۲ قطع کند ثالثاً با منصف الزاویه xOy مماس شود رابعاً طولهای نقاط تقاطع آن با خط $y=2$ ریشه‌های معادله $x^2-2x-2=0$ باشد خامساً محور تقارن منحنی را تعیین نمائید سادساً تحقیق کنید که نقطه مانند M در روی منحنی فوق یافت میشود که مماس بر آن موازی محور $x'x$ میباشد مختصات این نقطه را تعیین

نموده و معادلهٔ مکان آنرا هرگاه a تغییر کند معلوم کنید و آنرا رسم نمائید

۱۲۴- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x^3 + 3x^2 - 4$

ثانیاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = -x^2$ در روی همان دو محور و تحقیق آنکه

طول نقاط تقاطع دو منحنی ریشه های معادلهٔ $(x-1)(x+2)^2 = 0$ میباشد

همچنین عرض نقاط تقاطع را معلوم کنید ثالثاً مطلوبست محاسبهٔ tg زاویه حادثه مابین

دو منحنی در نقاط تقاطع آنها

۱۲۵- دو کره متحد المرکز یکی بشعاع x و دیگری بشعاع $x+1$ مفروض است مطلوبست

اولاً محاسبهٔ V حجم مابین دو کره ثانیاً شعاع x را طوری تعیین کنید که $V = \frac{4}{3}\pi K$

باشد (بحث برحسب مقادیر مثبت K) ثالثاً مطلوبست رسم منحنی تغییرات

$y = V$ و حل و بحث گرافیک سؤال دوم

۱۲۶- تابع $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ که در آن $a < b < c$ فرض

شده مفروض است مطلوبست اولاً محاسبهٔ y' و تحقیق آنکه معادله $y' = 0$

دارای یک ریشه مابین a و b و یک ریشه مابین b و c خواهد بود ثانیاً

تحقیق کنید حالت خاصی را که $a = b$ باشد ثالثاً بفرض آنکه $a = b = -1$

و $c = 0$ باشد جدول و منحنی تغییرات تابع را رسم کنید

۱۲۷- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{(x-3)^2}{x^2 - 7x + 10}$

ثانیاً نقطه مانند M_1 بطول x_1 در روی منحنی مفروض است ثابت کنید که نقطه دیگری

مانند M_2 بهمان عرض درروی منحنی یافت میشود و دراینصورت x_2 طول نقطه M_2 را برحسب x_1 حساب کنید ثالثاً نقطه $A(3,0)$ مفروض است مطلوبست تشکیل معادلهٔ خط AD که از نقطه A باضریب زاویهٔ m مرور نماید رابعاً m را بطریقی تعیین کنید که خط AD منحنی را در دو نقطه P و Q قرینه یکدیگر نسبت به O قطع نماید

۱۲۸- تابع $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ مفروض است اولاً رابطهٔ مابین ضرایب فوق تعیین کنید برای آنکه تابع نه دارای ماکزیموم و نه دارای مینیموم باشد ثانیاً هرگاه $a=a'=1$ باشد مطلوبست محاسبهٔ b و c و b' و c' بطریقی که تابع بازاء $x=-1$ دارای مینیمومی مساوی -1 و بازاء $x=+1$ دارای ماکزیمومی مساوی ۲ باشد ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع را بازاء این مقادیر b و c و b' و c' رسم کنید

۱۲۹- دو محور قائم Ox و Oy و نقطه A بمختصات $a>0$ و $b>0$ مفروض است از نقطه A خطی مرور میکند که محور xها را در نقطه M و محور yها را در نقطه M' قطع میکند مطلوبست اولاً تغییرات y عرض نقطه M برحسب x طول آن ثانیاً تغییرات S سطح مثلث OMM' برحسب x ثالثاً تغییرات V حجم حادث از دوران این مثلث حول Oy برحسب x

۱۳۰- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x-2}{(x-1)^2}$ ثانیاً هرگاه نقاط M_1 و M_2 دو نقطه از منحنی بعرض a باشند مطلوبست تشکیل معادله

درجه دومی که ریشه های آن t_1 و t_2 ضریب زاویه خطوط OM_1 و OM_2 باشد و تحقیق کنید آیا ممکن است بازاء مقدار یا مقادیری از a دو خط OM_1 و OM_2 بر یکدیگر عمود گردند ثالثاً هرگاه فرض کنیم m_1 و m_2 ضریب زاویه خطوط مماس بر منحنی در نقاط M_1 و M_2 باشد مقدار a را تعیین کنید بطریقی که $m_1 m_2 = -\frac{a^2}{2}$ باشد

۱۳۱ - معادله $x^2 - 2xy + a(y - 4a) = 0$ مفروض است اولاً آنرا نسبت به y حل نموده جدول و منحنی تغییرات تابع حاصل را رسم کنید ثانیاً بازاء هر مقدار y از معادله فوق دو مقدار x_1 و x_2 بدست میآید تحقیق کنید که مابین $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$ رابطهٔ موجود است که بستگی بمقدار y ندارد ثالثاً مربع مستطیلی فرض میکنیم که قاعدهٔ آن $x_1 - x_2$ و ارتفاعش y نظیر آن باشد حال مربع مستطیل فوق را در حول ارتفاع آن دوران میدهیم مطلوبست محاسبهٔ عبارت حجم حادث از دوران آن برحسب a و y و تغییرات آن هرگاه y تغییر کند

۱۳۲ - معادله $mx^2 - 2x - 4m - 1 = 0$ مفروض است اولاً تحقیق کنید که معادلهٔ فوق بازاء جمیع مقادیر m دارای دو ریشهٔ حقیقی است ثانیاً مطلوبست تعیین مقادیر m که بازاء آنها یکی از ریشه ها بزرگتر از ۱ و دیگری کوچکتر از ۱ باشد ثالثاً تحقیق کنید که مابین این مقادیر یک مقدار m یافت میشود که بازاء آن مجموع مربعین ریشه ها باضافهٔ مجموع ریشه ها مساوی ۱۱ باشد رابعاً تابع $y = mx^2 - 2x - 4m$

مفروض است مقدار m را بطریقی تعیین کنید که تابع دارای ماکزیمومی مساوی ۲ بوده و بعلاوه بازاء $x=0$ مقدار تابع مثبت باشد همچنین مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات آن بازاء این مقدار m

۱۴۳- قطر دایرهٔ قاعدهٔ مخروط مستدیر قائمی مساوی $2R$ میباشد مولد SA را مساوی x فرض میکنیم مطلوبست اولاً محاسبهٔ نسبت حجم مخروط بحجم کرهٔ محاط در آن ثانیاً تغییرات این نسبت وقتی x تغییر کند ثالثاً تعیین x بطریقیکه نسبت فوق مساوی ۹ باشد

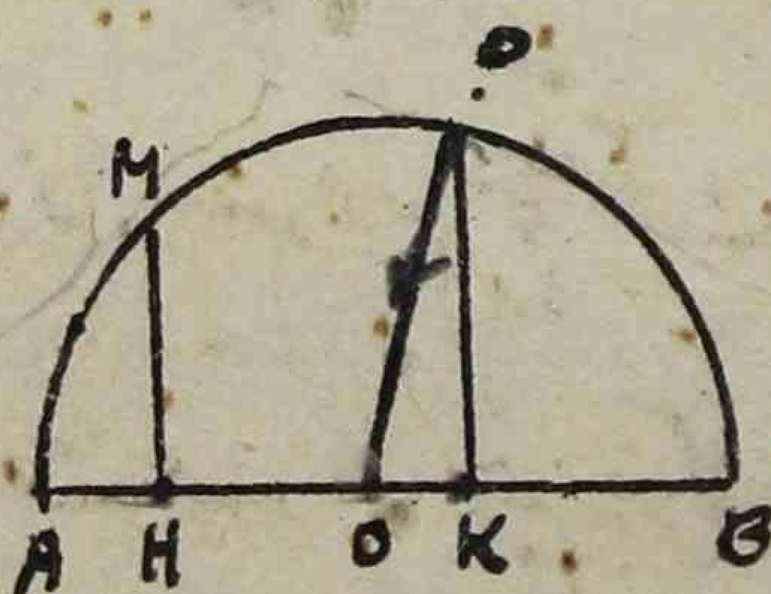
۱۴۴- تابع $y=\frac{-x^2+4x+5}{2}$ مفروض است مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات آن ثانیاً در روی منحنی دو نقطه A' و A'' بعرض ۴ موجود است مطلوبست محاسبهٔ طول آنها و سطح مثلث $OA'A''$ ثالثاً بازاء h کوچکتر از مقداری که تعیین میشود دو نقطه H' و H'' در روی منحنی بعرض h یافت میشود مطلوبست محاسبهٔ مربع سطح مثلث $OH'H''$ برحسب h رابعاً رسم جدول و منحنی تغییرات عبارت اخیر هرگاه h در حدود ممکنه تغییر کند

۱۴۵- معادلهٔ $(m-1)x^2-2(m+1)x+2m+5=0$ مفروض است مطلوبست اولاً حدود مقادیر m برای آنکه معادلهٔ فوق دارای ریشه حقیقی باشد ثانیاً هرگاه m در حدود مقادیر فوق باشد محوری مانند ox و دو نقطه A و B را بطول $OA=x'$ و $OB=x''$ ریشه های معادله فوق فرض میکنیم مطلوبست طول oc نقطهٔ مانند c در صورتیکه بدانیم $\frac{2}{OC}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}$ میباشد و رسم

جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه m در حدود مقادیر فوق تغییر کند

۱۳۶- تابع $y = \frac{a(x^2-1)-x(a^2-1)}{x^2+1}$ که در آن a مقداریست ثابت مفروض است مطلوبست اولاً مقادیر x که بازاء آنها y صفر میشود و همچنین تعیین مقادیر x که بازاء آنها y' صفر میگردد و تحقیق آنکه این مقادیر برحسب a منطق میباشند ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع را هرگاه $a=2$ و x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم کنید ثالثاً در حالت کلی هرگاه $x = \operatorname{tg} u$ و $a = \operatorname{tg} \alpha$ فرض شود تحقیق کنید که y را میتوان بعبارت قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم تبدیل نمود

۱۳۷- نیمدایره بر کره و بقطر $AB = 2R$ مفروض است در روی AB دو نقطه H و K را اختیار نموده و فرض میکنیم $AH = x$ و $BK = 2x$ باشد



عمودهای HM و KP را بر AB اخراج نموده و شکل را در حول AB دوران میدهیم مطلوبست اولاً محاسبه V_1 حجم حادث از دوران سطح AHM و V_2 حجم حادث از دوران سطح BOP ثانیاً تعیین x بطریقی که نسبت $\frac{V_1}{V_2}$ مساوی مقدار معلوم m باشد (بحث بنابر آنکه دو حجم فوق دارای قطعه مشترکی نباشند) ثالثاً هرگاه V حجم کرهٔ حادث از دوران نیمدایره باشد مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات

$y = \frac{V^2 \times V_1}{V_2^3}$ هرگاه x از ۰ تا R تغییر کند

۱۳۸- معادله $(1-t)x^2 + (3t-5)x + 4(2-t) = 0$

مفروض است مطلوبست حدود t برای آنکه معادله دارای دو ریشه مثبت باشد

ثانیاً ریشه‌های معادله را اضلاع قائمه یک مثلث قائم الزاویه فرض میکنیم مطلوبست

محاسبه وتر مثلث برحسب t و رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه t در

حدود فوق تغییر کند ثالثاً مطلوبست محاسبه شعاع دائره محاطیه مثلث فوق و تغییرات

آن با شرایط فوق و همچنین محاسبه شعاع برحسب وتر

۱۳۹- معادله $\frac{m}{my - x} + \frac{1}{y - mx} - 1 = 0$ که در آن m متغیر

و x و y مختصات نقطه مانند M واقعه در سطح دو محور مبا باشد مفروض است

مطلوبست اولاً مکان نقطه M برای آنکه ریشه‌های معادله فوق مساوی باشند

ثانیاً برای آنکه معادله دارای دو ریشه حقیقی باشد ثالثاً برای آنکه ریشه‌ها مثبت باشند

رابعاً هرگاه $y = 1$ و $x = 2$ باشد تغییرات طرف اول معادله فوق را

بنابرآنکه m از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند معلوم نموده منحنی آنرا رسم کنید

۱۴۰- تابع $y = x + \frac{4}{x-1}$ مفروض است اولاً جدول و منحنی C نمایش

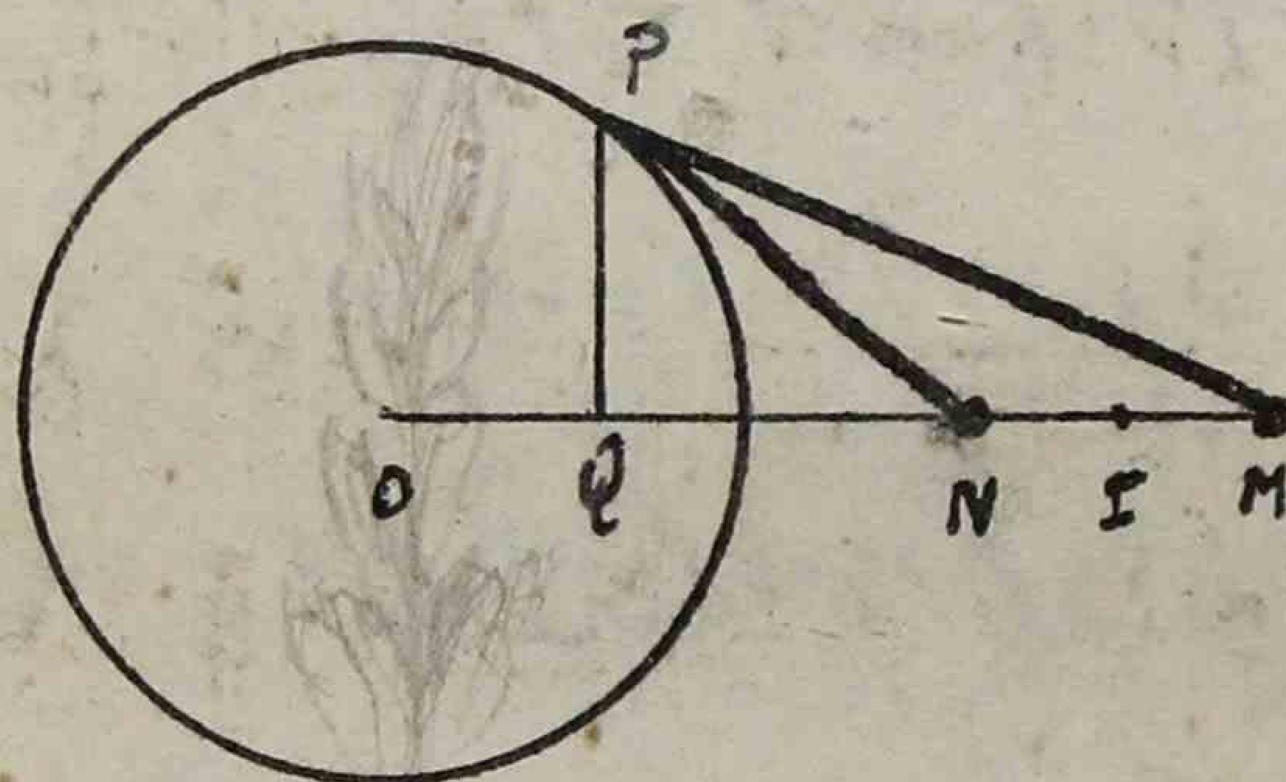
تغییرات آنرا رسم کنید ثانیاً منحنی را بواسطه خط L بمعادله $y = a$ قطع میکنیم

مطلوبست معین حدود a برای آنکه خط منحنی را قطع کند ثالثاً هرگاه نقاط A و B

محل تقاطع خط با منحنی باشد مطلوبست محاسبه مختصات نقطه M وسط AB

ومعادله ورسم مکان آن هرگاه α تغییر کند ومعلوم کنید دو نقطه از منحنی اول راکه برروی مکان فوق واقع میگردند رابعاً منحنی تابع $y=\frac{x^2+2x-5}{2}$ را رسم نموده وتحقیق کنید که این منحنی بر نقاط ماکزیموم ومینیموم منحنی C مرور مینماید ومعلوم نمائید که آیا دو منحنی نقطه مشترک دیگری نیز خواهد داشت یا خیر

۱۴۱- دایرهٔ O بشعاع R ونقطه I درسطح آن بفاصلهٔ $OI=3R$ مفروض است درروی خط OI ودریکطرف مرکز O دو نقطه M و N را اختیار میکنیم وفرض میکنیم نقطه I وسط MN و $OM \times ON = R^2$ باشد حال اگر $OM=y'$ و $ON=y''$ باشد مطلوبست



اولاً تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن y' و y'' باشد ثانیاً درروی محیط دایره نقطه مانند P فرض نموده آنرا بر OI درنقطه Q تصویر میکنیم وفرض میکنیم $OQ=x$ باشد مطلوبست محاسبهٔ x بطریقی که $\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = 2l^2$ باشد (بحث)
ثالثاً مطلوبست محاسبهٔ محیط مثلث PMN برحسب l و x وتغییرات آن هرگاه x درحدود ممکنه تغییر کند

۱۴۲- مطلوبست اولاً رسم خطوط $x+2y-7=0$ و $4x-y-10=0$ نسبت بدو محور $x'x$ و $y'y$ ومحاسبهٔ مختصات A نقطه تقاطع آنها وهمچنین محاسبهٔ طول OA ثانیاً از نقطه A خطی باضریب زاویه منفی $-m$ رسم میکنیم

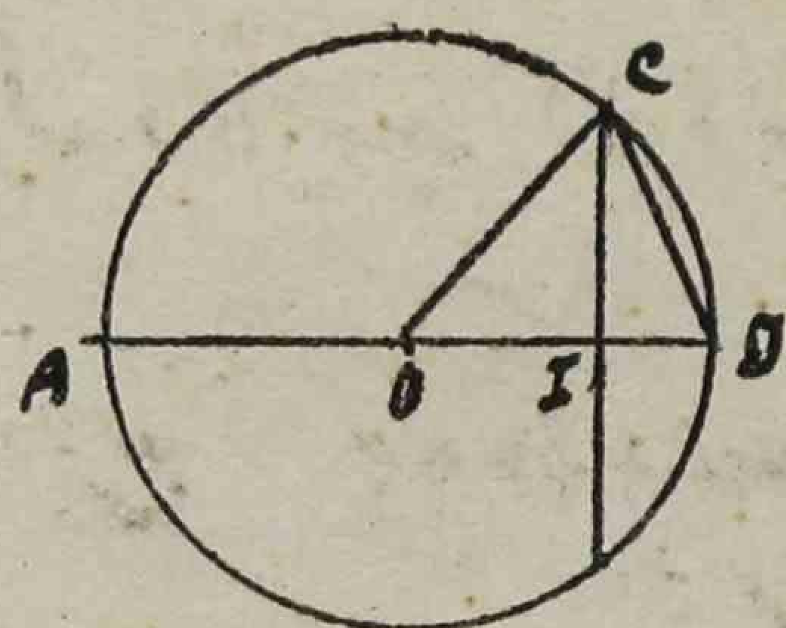
وفرض میکنیم نقطه تقاطع آن با محور $x'x$ ‏ P و با محور $y'y$ ‏ Q باشد مطلوبست محاسبهٔ طولهای OP و OQ و تغییرات سطح مثلث OPQ هرگاه m تغییر کند و ترسیم خط P_1Q_1 نظیر موقعی که سطح فوق مینیوم باشد ثالثاً مطلوبست محاسبهٔ h^2 مجذور ارتفاع وارد از O در مثلث OPQ و تغییرات آن هرگاه m تغییر کند و محاسبه h^2 ماکزیموم

۱۴۳ - دو تابع $y = ax^2 + bx + c$ و $y = a'x^2 + b'x + c'$ مفروضند اولاً رابطهٔ مابین ضرایب فوق تعیین کنید بطریقی که دو منحنی یکدیگر را بزاویه قائمه قطع نماید ثانیاً فرض کنید $a' = -1$ و $b' = 0$ و $c' = \frac{3}{2}$ باشد در اینصورت a و b و c را نیز تعیین نموده دو منحنی را در روی یک محور رسم کنید ثالثاً در سطح دو محور فوق نقطهٔ تعیین کنید که چون از آن بنقاط تقاطع دو منحنی وصل کنیم این خطوط بترتیب با جهت مثبت محور $x'x$ زوایای 45 و 60 تشکیل دهد رابعاً هرگاه فرض کنیم محور $x'x$ بر نقطه تقاطع دو منحنی مرور نموده و نسبت بمحور $y'y$ قائم باشد صورت جدید معادلات دو منحنی را معلوم کنید

۱۴۴ - مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x}{x^2 - 2x + m}$ و تحقیق حالات مختلفه آن برحسب مقادیر m ثانیاً خط D موازی محور $x'x$ منحنی را منتهی در دو نقطه M' و M'' قطع مینماید هرگاه عرض نقطه P محل تقاطع خط با محور $y'y$ در دست باشد مطلوبست طول نقطه M وسط $M'M''$ و همچنین طول نقطه Q مزدوج

توافقی P نسبت به M' و M'' و معادله و رسم مکان نقاط M و Q هرگاه نقطه P محور $y'y$ را طی نماید

۱۴۵ - در دایرهٔ مفروضی قطر AD و وتر CI عمود میباشد فرض میکنیم $CD=x$ وشعاع دایره مساوی y باشد



مطلوبست اولاً محاسبهٔ سطح حادث از دوران خط مختلط OCD درحول OD

ثانیاً مطلوبست حجم محدود به سطح فوق وهمچنین رابطه مابین x و y بطریقی که این سطح مساوی πa^2 باشد و از آن مطلوبست حدود تغییرات x ثالثاً با وجود شرط فوق فرض میکنیم $t = \frac{x^2}{a^2}$ باشد درانصورت جدول ومنحنی تغییرات مجذور حجم فوق را هرگاه t تغییر کند رسم نمائید

۱۴۶ - تابع $y = \frac{3x^2-2}{x^2+2x+a}$ مفروض است اولاً مطلوبست مقادیر a که بازاء آنها تابع همیشه در یک جهت تغییر کند ثانیاً تعیین مقادیر a که بازاء آنها y دارای یک ماکزیموم ویک مینیموم باشد وتحقیق کنید که شرط لازم وکافی برای آنکه تابع بازاء مقداری مانند x_1 ماکزیموم و بازاء x_2 مینیموم باشد آنست که $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$ باشد همچنین مقدار a را تعیین کنید برای آنکه $x_1 = \frac{1}{3}$ و $x_2 = 2$ باشد وجدول ومنحنی تغییرات تابع را بازاء این مقدار a رسم کنید ثالثاً مطلوبست تشکیل معادلهٔ درجه دومی که ریشه های آن مقادیر M و m ماکزیموم ومینیموم تابع باشد را بگا مطلوبست

تعیین رابطه مستقلی از a مابین مقادیر M و m

۱۴۷ - دایرهٔ بقطر $AB = 2R$ و نقطه M در روی آن بفاصله $AM = x$ مفروض است وتر MN را بر AB عمود نموده MB و NB را وصل میکنیم مطلوبست اولاً محاسبهٔ r شعاع دایرهٔ محاطیه مثلث MNB برحسب R و x ثانیاً هرگاه نقطه c مرکز این دایره باشد مطلوبست محاسبهٔ Mc برحسب R و x ثالثاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{Mc^2}{R}$ هرگاه x تغییر کند رابعاً هرگاه فرض کنیم $R = 1$ باشد Mc را تا یک میلیمتر تقریب حساب کنید

۱۴۸ - مطلوبست اولاً تشکیل معادله درجه دومی که ریشه های آن x' و x'' در روابط ذیل صدق نماید:

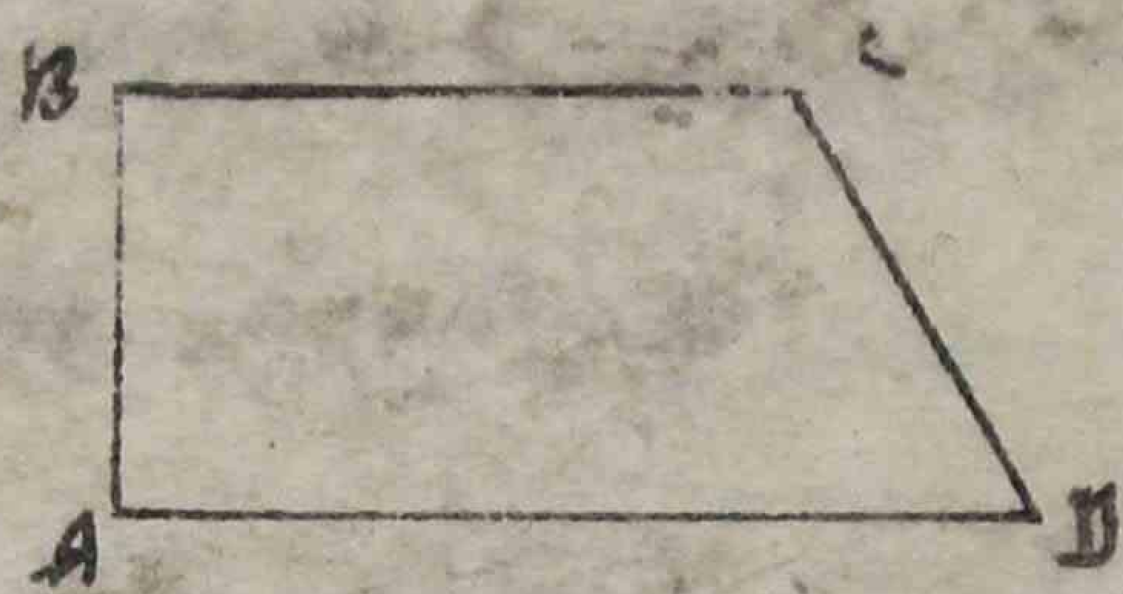
$$4x'x'' - 5(x'+x'') + 4 = 0$$

$$(x'-1)(x''-1) = \frac{1}{1-a}$$

ثانیاً مطلوبست تعیین وضعیت ریشه های معادله فوق نسبت به ۱- و ۱+ برحسب مقادیر مختلفه a ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$ وتحقیق نتایج ثانیاً از روی منحنی رابعاً فرض میکنیم خطی موازی محور $x'x$ منحنی را در دو نقطه A و B قطع نماید مطلوبست رابطه مابین مختصات نقطه c وسط AB :

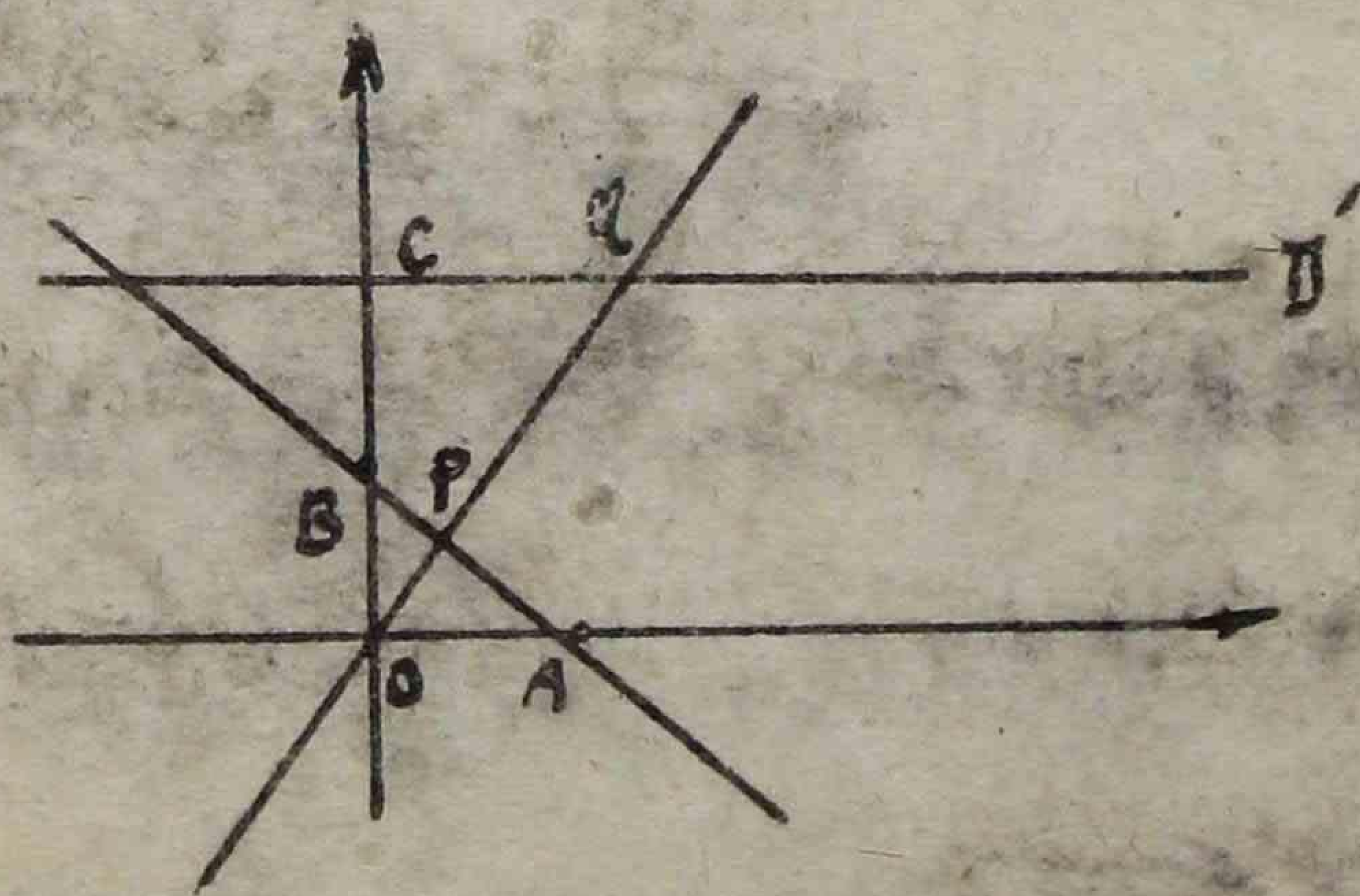
ومعادله ورسم مکان نقطه c هرگاه خط بموازات خود حرکت نماید

۱۴۹ - ذوزنقه ABCD که در آن زوایای A و B قائمه است مفروض است



فرض میکنیم AD=a ثابت وسطح ذوزنقه نیز ثابت ومساوی a^2 باشد مطلوبست عبارت سطح جانبی مخروط ناقص حادث از دوران ذوزنقه درحول AB برحسب a وطول متغیر AB=x وتغییرات مربع آن هرگاه x تغییر کند

۱۵۰ - دو محور قائم ox و oy مفروض است خط D محور ox را درنقطه A و محور oy را درنقطه B قطع میکند بطریقی که oA = oB = 1 میباشد خط دیگر D' موازی محور ox محور oy را درنقطه c قطع میکند بطریقی که oc = ۲ میباشد حال از نقطه o خطی با ضرب

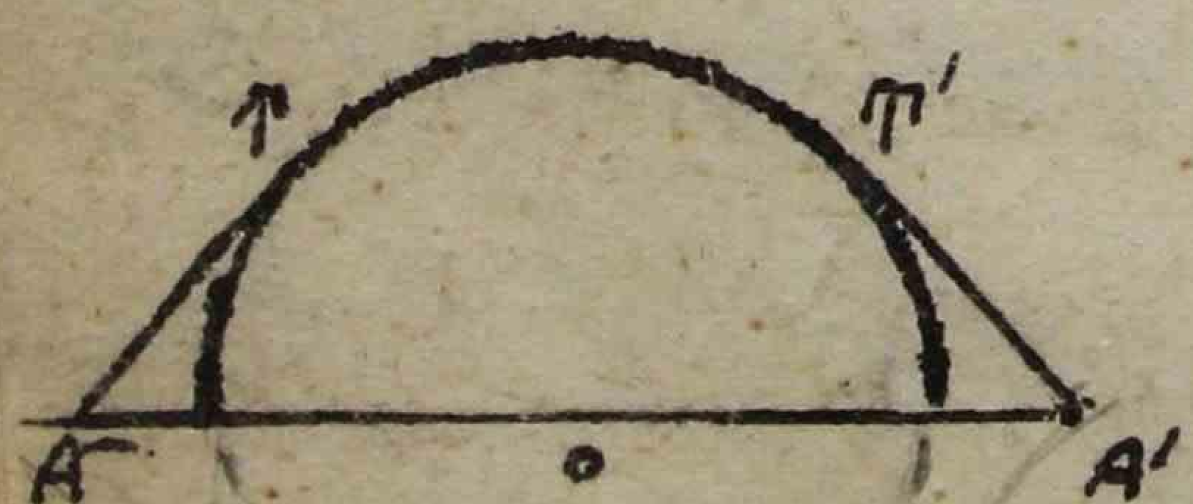


زاویه m رسم میکنیم وفرض میکنیم که خط D را درنقطه P وخط D' را درنقطه Q قطع کند مطلوبست اولاً محاسبه oP و oQ برحسب m ثانیاً رسم جدول و منحنی تغییرات y = oP×oQ هرگاه m از -∞ تا +∞ تغییر کند ثالثاً درحالتی که فرض کنیم oP×oQ = a باشد مقدار a را تعیین کنید بطریقی

که دو خط PQ عمود بر یکدیگر موجود باشد بطریقی که مابین قطعات OP و OQ رابطه اخیر برقرار باشد

۱۵۱ - اولاً معادلهٔ $(x-1)^2 + 2x^2 = 9$ را حل کنید ثانیاً مقدار m را تعیین کنید بطریقی که معادلهٔ $(x-1)^2 + 2x^2 = m$ لااقل دارای یک جواب باشد و در اینصورت علامت جوابها را تعیین کنید ثالثاً دو نقطه O و A را در روی محور اختیار نموده و فرض میکنیم OA مساوی واحد و جهت از O به A جهت مثبت باشد حال اگر نقطه M نقطه از محور بوده و $OM = x$ باشد مطلوبست موضع نقطه M برای آنکه $\overline{MA}^2 + 2\overline{OM}^2 = 9\overline{OA}^2$ باشد رابعاً مطلوبست تغییرات $y = \overline{MA}^2 + 2\overline{OM}^2$ هرگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند و وضعیت نقطه M را تعیین کنید بطریقی که y کوچکترین مقدار ممکنه را دارا گردد

۱۵۲ - دو نقطه A و A' بفاصلهٔ $AA' = 2a$ مفروض است بمرکز O وسط AA' نیم‌دایرهٔ بشعاع R رسم نموده از A و A' دو خط بر آن مماس میکنیم و شکل را در حول AA' دوران میدهیم



مطلوبست اولاً محاسبهٔ سطح منطقه حادث از دوران قوس TT' و حجم حادث از دوران قطاع TOT' برحسب R و a ثانیاً سطح حادث از دوران AT و حجم حادث از دوران شکل مختلط AA'T'TA ثالثاً محاسبهٔ R بطریقی که این حجم m برابر حجم کره بشعاع R باشد (بحث) همچنین مطلوبست محاسبهٔ نسبت $\frac{R}{a}$ در حالتیکه $m=1$ و $m=\frac{3}{2}$ باشد

۱۵۴ - معادلهٔ درجه دوم $x^2 - x(4+y) + 4 - y = 0$ مفروض است مطلوبست: ۱- بحث در وجود و علامت ریشه های آن برحسب مقادیر y ۲- تابع $y = \frac{x^2+mx+4}{x+1}$ را فرض میکنیم مطلوبست حدود مقادیر m برای آنکه تابع همیشه در یک جهت تغییر کند یا آنکه دارای یک ماکزیموم و یک مینیموم باشد ۳- تحقیق کنید که کلیه منحنیاتی که بازاء مقادیر مختلفه m رسم میشوند همواره بر نقطه ثابتی مرور مینمایند و مختصات این نقطه را حساب کنید ۴- در حالتی که تابع دارای یک ماکزیموم و یک مینیموم باشد معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن مقادیر ماکزیموم و مینیموم تابع باشد و تحقیق کنید که مابین این مقادیر رابطه موجود است که بستگی به m ندارد ۵- مقدار m را حساب کنید بطریقی که منحنی بر محور $x'x$ مماس گردد ۶- منحنی تابع فوق را بازاء $m=-4$ رسم کنید ۷- از روی منحنی فوق بحث سؤال اول را نتیجه بگیرید ۸- ثابت کنید که منحنی فوق نسبت بنقطه تقاطع دو خط مجانب آن قرینه است ۹- تحقیق کنید که هر خط بصورت $y=x+a$ منحنی را در یک نقطه قطع میکند و تحقیق کنید حالت خاصی را که $a=-5$ باشد ۱۰- ثابت کنید که از مبدأ o میتوان دو خط بر منحنی مماس نمود در اینصورت مطلوبست محاسبه tg زاویه حادثه مابین دو مماس

مشتق خطوط مثلثاتی

۸۸ - **قضیه** - در دایره مثلثاتی هر قوس که از حیث مقدار مطلق کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد محصور است مابین $\sin$ و tg آن

قوس مثبت $\widehat{AM}=x$ را فرض نمود

آزا بر OA تصویر میکنیم بنا بتعریف $\overline{AT}=\operatorname{tg}x$ و $\overline{PM}=\sin x$ میباشد

حال در دو مثلث OAM و OAT و قطاع OAM نامساویهای ذیل را میتوان نوشت :

سطح مثلث OAM < سطح قطاع OAM < سطح مثلث OAT

ویا $\frac{1}{2}OA\times PM < \frac{1}{2}OA\times \widehat{AM} < \frac{1}{2}OA\times AT$

ویا $\overline{PM} < \widehat{AM} < \overline{AT}$ واز آنجا $\sin x < x < \operatorname{tg}x$

درصورتیکه قوس x منفی فرض شود نامساویهای فوق درجهت مخالف برقرار بوده و بنابراین حکم همیشه محقق است

نتیجه - نسبت قوس به $\sin$ آن میل میکند بسمت واحد هرگاه قوس

میل کند بسمت صفر

اولاً هرگاه x مثبت باشد بر وفق قضیه فوق حاصل میشود $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

و یا $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ حال اگر x میل کند بسمت صفر یکطرف نامساویهای فوق ثابت و مساوی ۱ و طرف دیگر یعنی $\frac{1}{\cos x}$ نیز میل میکند بسمت ۱ بطوریکه حد نسبت $\frac{x}{\sin x}$ که همواره محصور ما بین این دو مقدار است مساوی ۱ خواهد بود

ثانیاً هرگاه قوس x منفی باشد حاصل میشود $\operatorname{tg} x < x < \sin x$

ولذا $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

در نامساویهای فوق نیز مانند حالت قبل هرگاه x میل کند بسمت صفر نسبت $\frac{x}{\sin x}$ میل میکند بسمت واحد

بنابراین در همه حال میتوان نوشت $\lim \left|\frac{x}{\sin x}\right|_{x \to 0} = 1$

واضح است که هرگاه حد نسبت فوق مساوی ۱ باشد حد نسبت $\frac{\sin x}{x}$ نیز هرگاه x میل کند بسمت صفر مساوی ۱ خواهد بود بطوریکه میتوان نوشت :

$$\lim \left|\frac{\sin x}{x}\right|_{x \to 0} = 1$$

محاسبه مشتق خطوط مثلثاتی

۹۰- فرض میکنیم u تابعی از x باشد که مشتق آنرا بحسب x به u'_x مینامیم



حال اگر فرض کنیم $y = \sin u$ و یا $y = \cos u$ باشد مقصود محاسبهٔ
مشتق توابع فوق میباشد

۹۱- مشتق $y = \sin u$ - مشتق $y = \sin u$ عبارتست از

$$y' = \cos u \times u'_x$$

زیرا اگر بنا بتعریف مشتق عمل کنیم مرتباً حاصل میشود :

$$x_1 = x \qquad y_1 = \sin u$$
$$x_2 = x + \Delta x \qquad y_2 = \sin(u + \Delta u)$$
$$x_2 - x_1 = \Delta x \qquad y_2 - y_1 = \Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin u = 2\sin\frac{\Delta u}{2}\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta u}{2}\cdot\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}} \times \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = \cos u \times u'_x$$

حالت مخصوص - مشتق $y = \sin x$ بنا بر دستور فوق عبارتست
از $y' = \cos x$

مثال - مشتق $y = \sin 2x$ عبارتست میگردد از $y' = 2\cos 2x$

و مشتق $y = -\frac{2}{3}\sin^2 x$ عبارتست از $y' = -\frac{4}{3}\sin x \cos x$

$y' = u' \sin u$ (handwritten pencil note)

$y' = \cos u$ (handwritten pencil note)

۹۲- مشتق $y = \cos u$ - مشتق $y = \cos u$ عبارتست از

$$y = -\sin u \times u'_x$$

زیرا چون بر طبق تعریف مشتق عمل کنیم مرتباً میتوان نوشت:

$$x_1 = x \qquad y_1 = \cos u$$

$$x_2 = x + \Delta x \qquad y_2 = \cos(u + \Delta u)$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x \qquad y_2 - y_1 = \Delta y = \cos(u + \Delta u) - \cos u =$$

$$= -2 \sin \frac{\Delta u}{2} \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin \frac{\Delta u}{2} \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}} \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0} = y' = -\sin u \times u'_x$$

حالت مخصوص - مشتق $y = \cos x$ بر وفق دستور فوق عبارتست

از $y' = -\sin x$

۹۳- مشتق $y = \operatorname{tg} u$ و $y = \operatorname{cotg} u$ و $y = \operatorname{séc} u$ و $y = \operatorname{cosec} u$ -

چون بجای مقادیر فوق نسبت قرار داده و بروفق آنچه میدانیم مشتق حساب کنیم حاصل میشود:

مشتق $y = \operatorname{tg} u$ $\qquad y' = \frac{1}{\cos^2 u} \times u'_x$

مشتق $y = \cot u$ $\qquad y' = \frac{-1}{\sin^2 u} \times u'_x$

مشتق $y = \sec u$ $\qquad y' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \times u'_x$

مشتق $y = \operatorname{cosec} u$ $\qquad y' = \frac{-\cos u}{\sin^2 u} \times u'_x$

مسائل

۱۵۴ - مشتق توابع ذیل را بطور مستقیم بازاء $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = -\pi$ و $x = \frac{a}{2}$ حساب کنید

$y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad y = \operatorname{tg} x$

$y = \sin^2 x \qquad y = -2\cos^2 x \qquad y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$

$y = 1 + \sin x \qquad y = 1 - \cos^2 x \qquad y = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \qquad y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \qquad y = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\sin x}$

۱۵۵ - مشتق توابع ذیل را حساب کنید :

$y = \sin^3 x + \sin x + \cos x$

$y = \sin^4 x - \sin^2 x + \sin x$

$y = \frac{-1}{2}\sin\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$

$$\begin{cases} y = \cos^2 x - 5\cos x - 2 \\ y = \cos^2 x - \sin^2 x \\ y = \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 2x \end{cases}$$

۱۵۶ -

$y = \frac{\sin x}{1+\sin x}$

$y = \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

$$\begin{cases} y = \frac{\cos x}{1-\cos x} \\ y = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} \end{cases}$$

$$y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad y=\frac{(1+\sin x)^2}{\sin x(1-\sin x)}$$ ۱۵۷-

$$y=\operatorname{tg} x+\sec x \qquad y=\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$$

$$y=\frac{\sin 2x+2\sin 3x+\sin 7x}{\sin 2x+\sin 3x} \qquad y=\frac{a\sin x+b\cos x+c}{a'\sin x+b'\cos x+c'}$$

۱۵۸-

$$y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \qquad y=\sqrt{\frac{x\sin x}{1-\cos x}}$$

$$y=\sqrt{1+\sin x}-\sin x\cos x \qquad y=\sqrt{\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}}$$

۱۵۹- مقدار حقیقی عبارات ذیل را حساب کنید :

$y=\frac{1-\cos x}{x^2}$ بازاء $x=0$

$y=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}$ بازاء $x=0$

$y=\frac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ بازاء $x=\frac{\pi}{4}$

$y=\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$ بازاء $x=a$

۱۶۰-

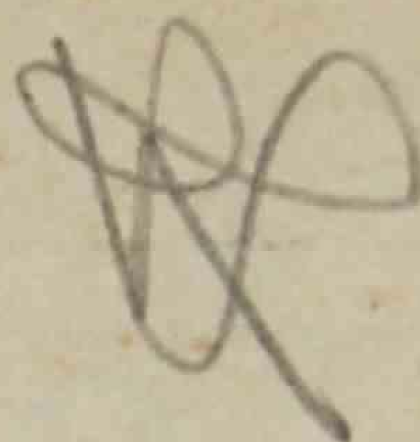
$y=\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$ بازاء $x=0$

$y=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ بازاء $x=\frac{\pi}{3}$

$y=\frac{x\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-1}$ بازاء $x=0$

$y=\frac{\cos x}{\pi-2x}$ بازاء $x=\frac{\pi}{2}$





تغییرات توابع مثلثاتی

۹۴- برای رسم جدول و منحنی تغییرات توابع مثلثاتی همان دستور توابع جبری را باید بکار برد منتهی چون توابع مثلثاتی متناوب میباشند کافیست که متغیر x را در حدود معینی (دورهٔ تناوب) تغییر داد اینک برای نمونه تغییرات بعضی توابع را مورد مطالعه قرار میدهیم

مسئله ۱- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y=2\sin^2 x-2\sin x+3$ هرگاه x از 0 تا 2π تغییر کند

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

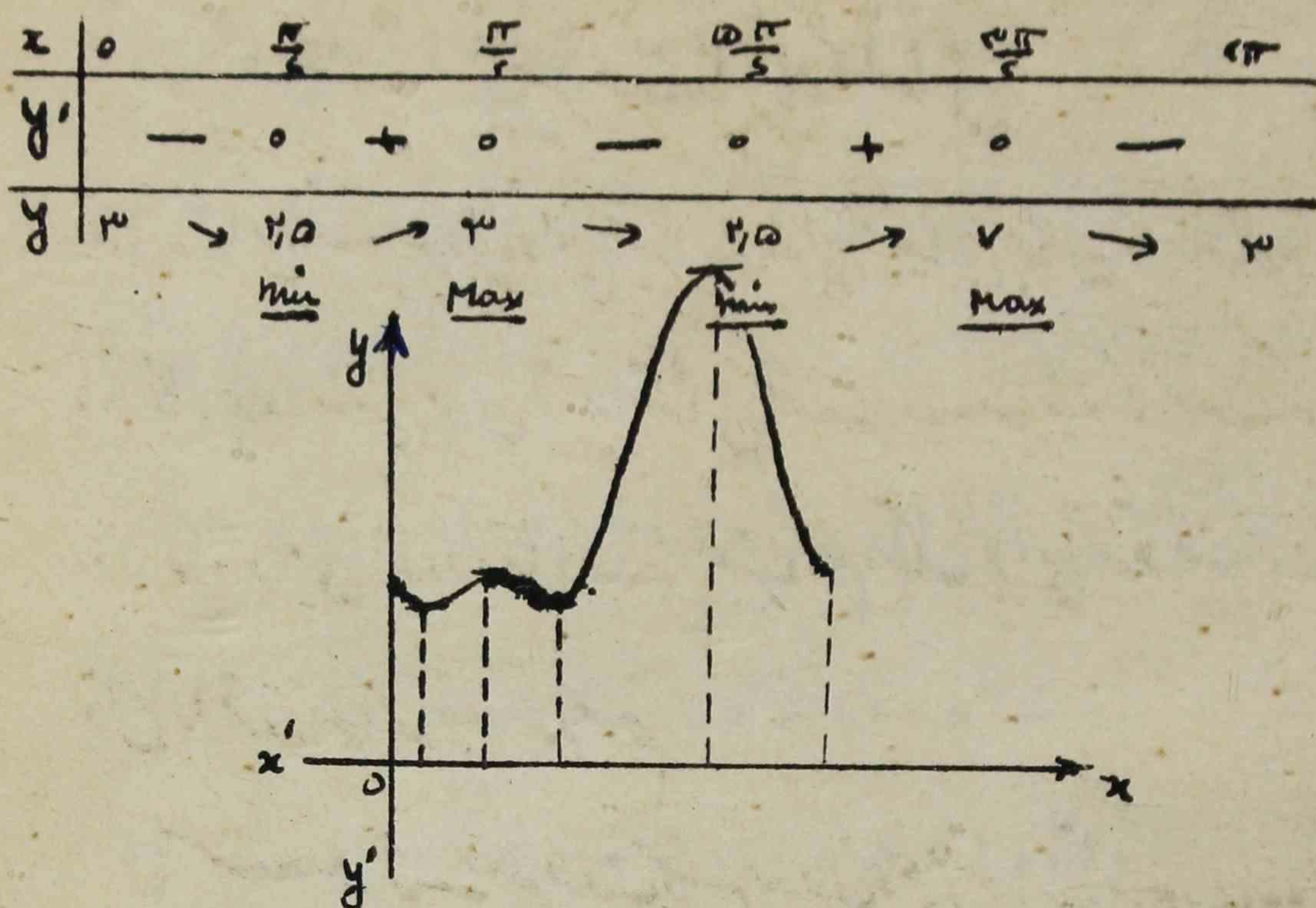
۲- مشتق آن عبارتست از $y'=4\sin x\cos x-2\cos x=2\cos x(2\sin x-1)$ که بازاء جوابهای $\cos x=0$ و یا $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ و جوابهای $\sin x=\frac{1}{2}$ و یا $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$ صفر میگردد

۳- بازاء $x=0$ و $x=2\pi$ حاصل میشود $y=3$

۴- چون y را مساوی صفر قرار دهیم حاصل میشود $2\sin^2 x-2\sin x+3=0$ که دارای جواب نیست بنابراین منحنی محور $x'x$ را قطع نمیکند

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل خواهد بود:

x	۰		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−	
y	۳	↘	۲٫۵	↗	۳	→	۲٫۵	↗	۷	→	۳
			min		Max		min		Max		



مسئله ۲ ـ مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \cos 5x + 5\cos x$ هرگاه x از ۰ تا π تغییر کند

۱ ـ تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است،

۲ ـ مشتق آن عبارتست از:

$$y' = -5\sin 5x - 5\sin x = -5(\sin 5x + \sin x) = -10\sin 3x \cos 2x$$

که بازاء جوابهای $\cos 2x = 0$ و $\sin 3x = 0$ صفر میگردد از معادله $\cos 2x = 0$ و از آنجا $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ حاصل میشود $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ که جوابهای محصور مابین صفر و π در آن عبارتست از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و از معادله $\sin 3x = 0$ حاصل میشود $3x = k\pi$ و از آنجا $x = \frac{k\pi}{3}$



که جوابهای محصور مابین صفر و π در آن عبارتست از ۰ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و π

۳- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=6$ و بازاء $x=\pi$ حاصل میشود $y=-6$

۴- چون y را مساوی صفر فرض کنیم حاصل میشود $\cos 5x + 5\cos x = 0$

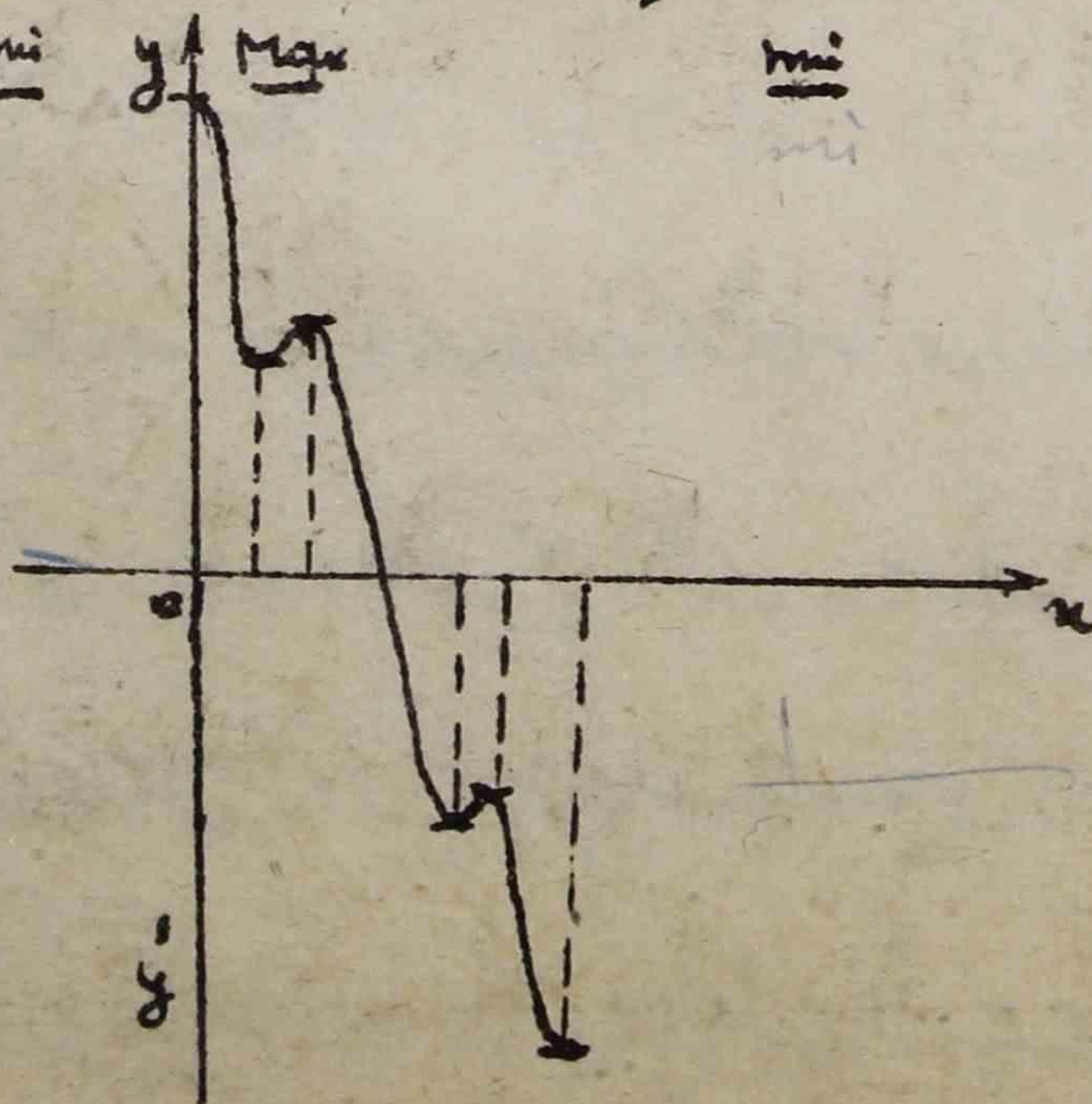
و یا $16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 10\cos x = 0$

و یا $2\cos x(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 5) = 0$

که فقط بازاء جواب $\cos x = 0$ و یا $x=\frac{\pi}{2}$ صفر میگردد

جدول و منحنی تغییرات آن بصورت ذیل میباشد

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y'	0	$-$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	0	$-$	0
y	6	↘	$2\sqrt{2}$	↗	3	↘	0	↘	-3	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	-6
	Max		mi		Max				mi		Max		mi



مسئله ۳ - جدول و منحنی تغییرات تابع $y=\frac{\cos 3x}{1+\cos 2x}$ هرگاه x

از ۰ تا 2π تغییر کند رسم نمائید

۱- ابتدا تابع فوق را بساده ترین صورت تبدیل میکنیم یعنی بجای $\cos 3x$ و $\cos 2x$ مقادیر آنها را برحسب $\cos x$ قرار داده آنرا خلاصه میکنیم تا حاصل شود:

$$y = \frac{4\cos^2 x - 3}{2\cos x}$$

۲- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است مگر بازاء جوابهای $\cos x = 0$ ویا $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$

۳- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{-\sin x\,(4\cos^2 x + 3)}{2\cos^2 x}$

که بازاء جوابهای $\sin x = 0$ ویا $x = 0$ و π و 2π صفر شده و تغییر علامت میدهد

۴- بازاء $x = 0$ و $x = 2\pi$ حاصل میشود $y = \frac{1}{2}$

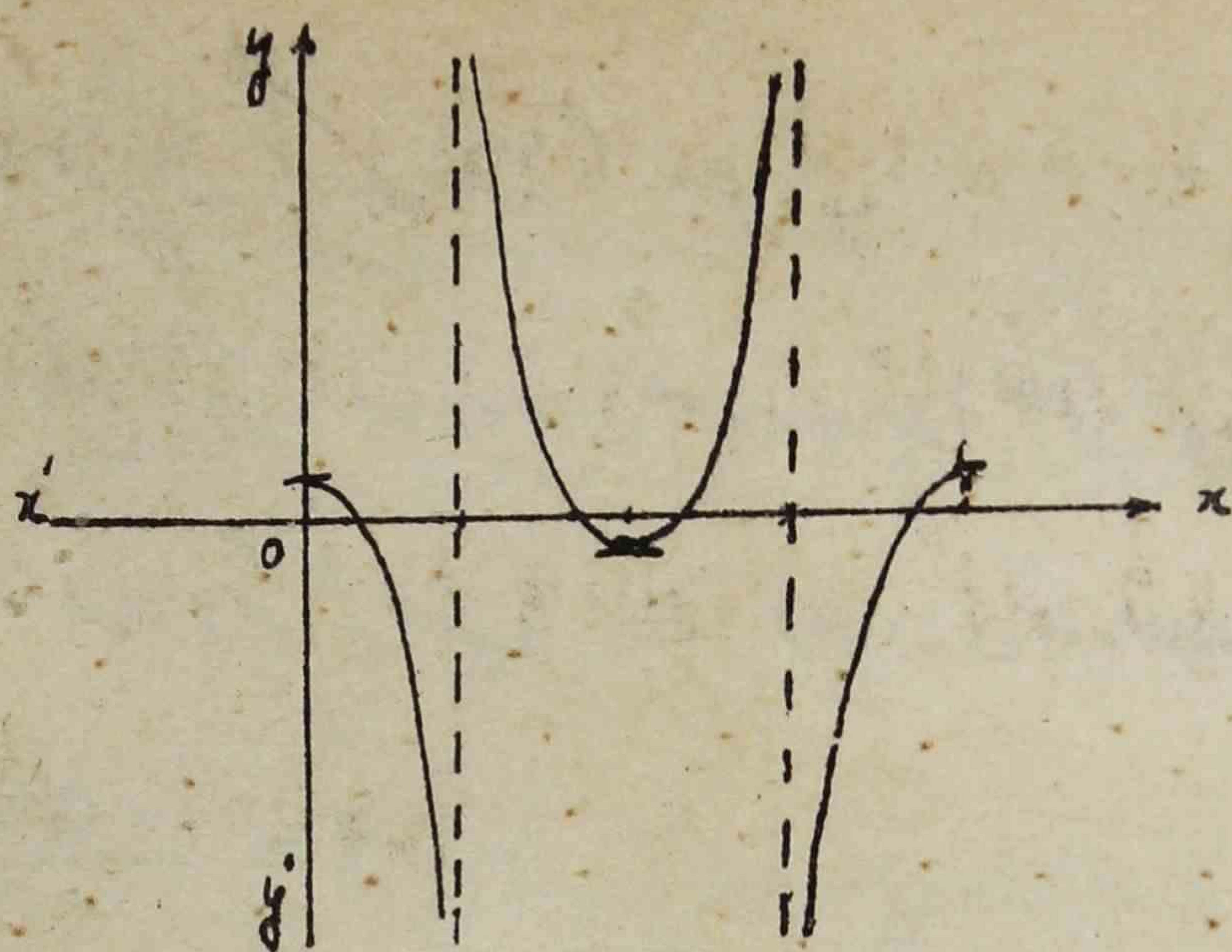
۵- بازاء $y = 0$ حاصل میشود $4\cos^2 x - 3 = 0$ یا $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

واز آنجا $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y'	0				$-$				0				$+$				0
y	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$
	Max								Min								Max





مسئله ۴ – مطلوبست تغییرات تابع $y = x + 2\cos x - 2$

۱– تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

۲– مشتق تابع عبارتست از $y' = 1 - 2\sin x$ که بازاء جوابهای $\sin x = \frac{1}{2}$ ویا $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$ صفر میگردد

۱– برای سهولت رسم منحنی تغییرات تابع فوق $\cos x$ را مساوی ۱ و ۱– و صفر قرار میدهیم دراینصورت سه خط $y_1 = x$ و $y_2 = x - 4$ و $y_3 = x - 2$ بدست میآید و بعد نقاط تقاطع منحنی مفروض را با هریک از خطوط فوق تعیین مینمائیم ازینقرار :

اولاً چون معادلهٔ $y_1 = x$ و معادلهٔ مفروض را با یکدیگر حل کنیم حاصل میشود $\cos x = 1$ ویا $x = 2k\pi$ که طول نقاط تماس منحنی با خط $y_1 = x$ میباشد

ثانیاً چون معادله $y_2 = x - 4$ را با معادله منحنی حل کنیم حاصل میشود $\cos x = -1$

ویا $x=(2k+1)\pi$ که طول نقاط تماس منحنی با خط $y_2 = x-4$ میباشد

ثالثاً بالاخره اگر معادله $y_3 = x-2$ ؛ را با معادلهٔ منحنی حل کنیم حاصل

میشود $\cos x = 0$ ویا $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ که عبارتست از طول نقاط

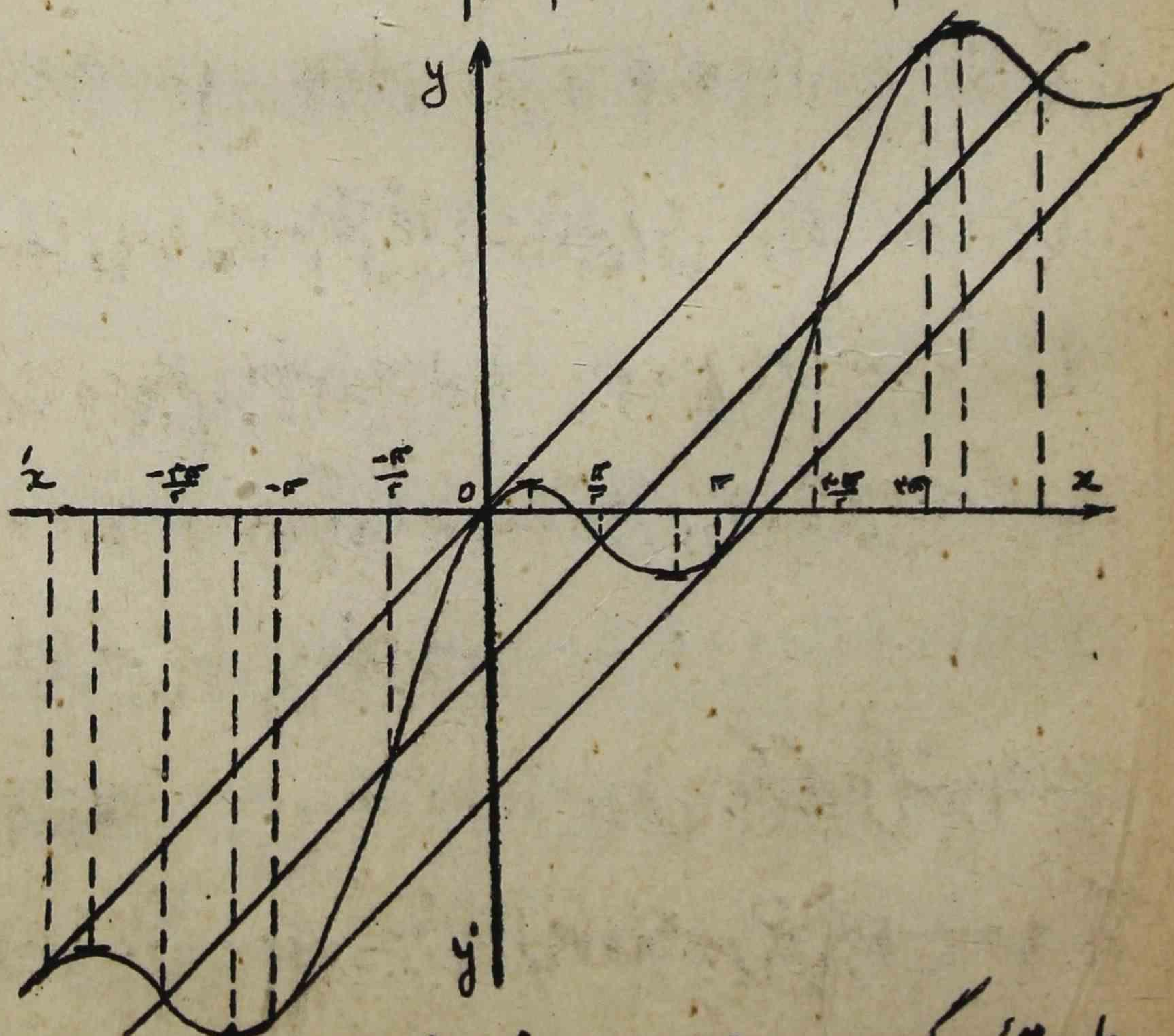
تقاطع منحنی با خط

$y_3 = x-2$

۴ ـ حال سه خط فوق را رسم نموده و نقاط تماس و نقاط تقاطعی را که قبلاً

تعیین نموده ایم در روی این خطوط بدست آورده و همچنین نقاط ماکزیموم و مینیموم

را نیز تعیین مینمائیم و بالنتیجه منحنی را رسم میکنیم



طریقهٔ دیگر برای رسم منحنی فوق ـ ممکن است معادلهٔ



$y = x + 2\cos x - 2$ را بدو تابع $y_1 = x - 2$ و $y_2 = 2\cos x$ تجزیه نموده
هر یک از آنها را رسم کرده و از جمع عرضهای متناظر بیک طول نقاط منحنی
مفروض را تعیین نمود

مسائل

۱۶۱- جدول و منحنی تغییرات توابع ذیل را رسم کنید :

$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x \qquad y = \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$y = 2\,\mathrm{tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x + 1 \qquad y = \sin x - \sin 2x$

$y = \sin x(1 - \cos x)^2 \qquad y = \cos 3x - \cos 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

۱۶۲- $y = \sin x \pm \cos x \qquad y = \mathrm{s\acute{e}c}\, x + \mathrm{tg}\, x$

$y = 3\sin 2x + 2\cos 3x - 3 \qquad y = \sin^3 x(1 - \cos x)$

$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x \qquad y = \cos 3x - m\cos 2x$

۱۶۳- $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x$

$y = \mathrm{tg}\, x + a\sin 2x \quad \left(a = 4,\ a = -\frac{4}{3},\ a = 3,\ a = 2\right)$

$y = \frac{2 + \cos x}{1 - \cos x} \qquad y = \frac{3\sin x}{2\sin x - 1} \qquad y = \frac{\mathrm{tg}\, x - 1}{\mathrm{tg}\, x + 1}$

$y = \frac{\mathrm{tg}\, 3x}{\mathrm{tg}^3 x} \qquad y = \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}\, x} \qquad y = \frac{7}{(\sqrt{2}\cos x + 1)^2}$

—164

$y = \dfrac{(1+\sin x)^3}{\sin x(1-\sin x)}$ $\quad$ $y = \dfrac{a\sin x - \cos x - 1}{a\cos x}$ $\quad 0 \leq x \leq \pi$

$y = \dfrac{4\sin^2 x - 5\sin x + 1}{6\sin^2 x - 5\sin x + 1}$ $\quad$ $y = \dfrac{\cos x + \sin x - 1}{\cos x - \sin x - 2}$

$y = \dfrac{\sin x + \cos x - 4}{\sin x + \sqrt{2}\cos x - 1}$ $\quad$ $y = \dfrac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin x}$

—165

$y = \dfrac{\sin x}{\sin \alpha} + \dfrac{\sin \alpha}{\sin x}$ $\quad 0 \leq x \leq \pi$ $\quad$ $y = \dfrac{m\cos x + m^2}{m\cos x + m^2 + 1}$

$y = \sin(a-x)\sin(a+x)$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

$y = \sin^4 x - 2\sin^2 x + 1$ $\quad$ $y = \sin x - \cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin x\cos x$

—166

$y = \sqrt{3\sin x - 1}$ $\quad$ $y = \sqrt{1 + 2\cos x} - \sin x$

$y = \sqrt{-2\cos^2 x + 3\cos x + 1}$ $\quad$ $y = \sqrt{\dfrac{2\cos x + 1}{2\cos x - 1}}$

—167

$y = x \pm \sin x$ $\quad$ $y = x - 2 \pm \cos x$

$y = 2x - \operatorname{tg} x$ $\quad$ $y = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad$ $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

$y = 3x - 2 + 2\cos x - \sin x$ $\quad$ $y = \sqrt{\dfrac{x\sin x}{1 - \cos x}}$



۹۵ - تغییرات تابع $y = x^3 + px + q$ و بحث در عدهٔ جوابهای معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3 + px + q = 0$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

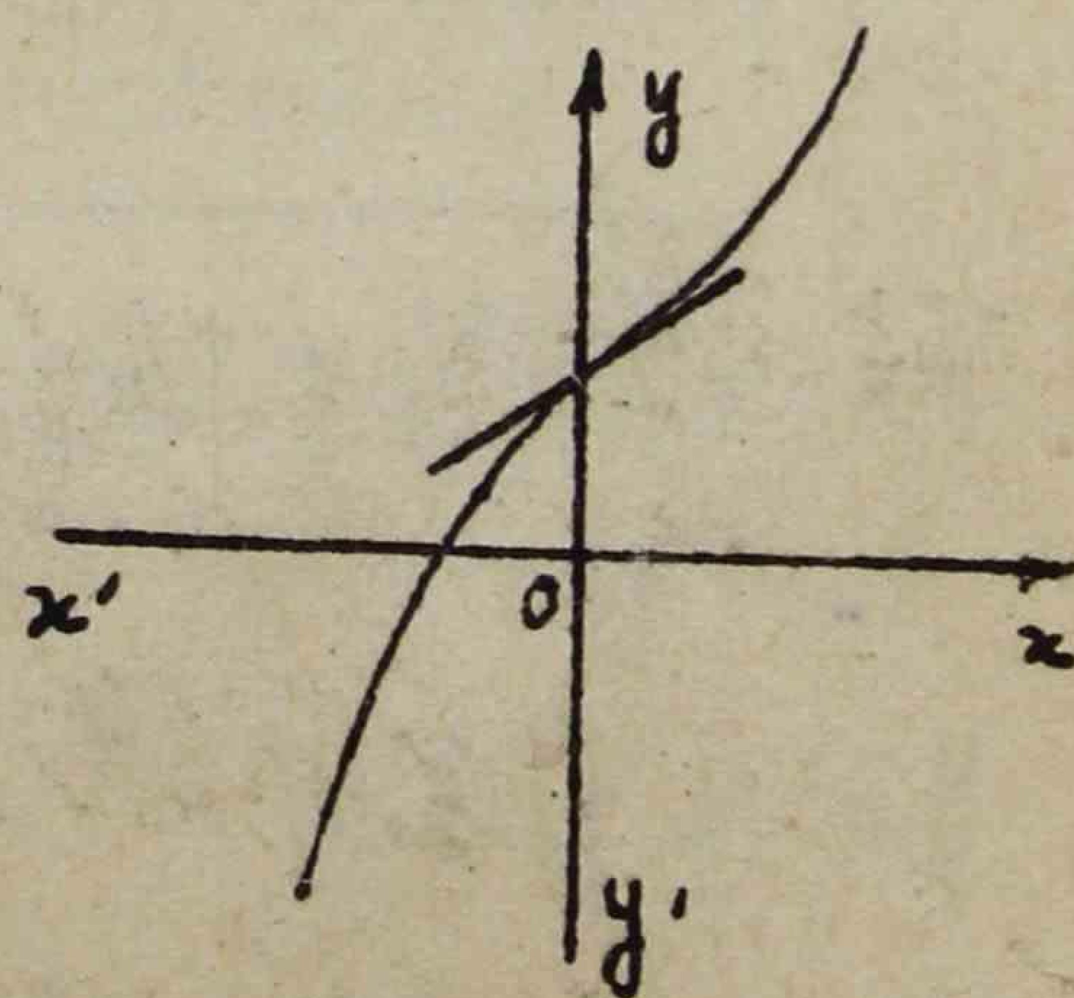
۲- بازاء $x = 0$ حاصل میشود $y = q$

۳- مشتق تابع عبارتست از $y' = 3x^2 + p$ که برحسب آنکه p مثبت یا منفی باشد در آن دو حالت ذیل را میتوان تشخیص داد

اولاً $p > 0$ در اینصورت مشتق همیشه مثبت و بنابراین تابع بازاء جمیع مقادیر صعودیست

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'			$+$		
y	$-\infty$	↗	q	↗	$+\infty$



چنانکه از جدول و منحنی فوق ملاحظه میشود منحنی محور $x'x$ را فقط در یک نقطه تقاطع میکند و بنابراین معادله $x^3 + px + q = 0$ در اینحالت دارای یکجوابست

ثانیاً $p<0$ در اینصورت مشتق دارای دو جواب خواهد بود که عبارتند از $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ و چون بازاء هر دو جواب تغییر علامت میدهد لذا تابع بازاء آنها ماکزیموم و مینیموم میباشد

جدول تغییرات بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		0		$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q$	$\searrow$	q	$\searrow$	$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q$	$\nearrow$	$+\infty$
			Max				Min		

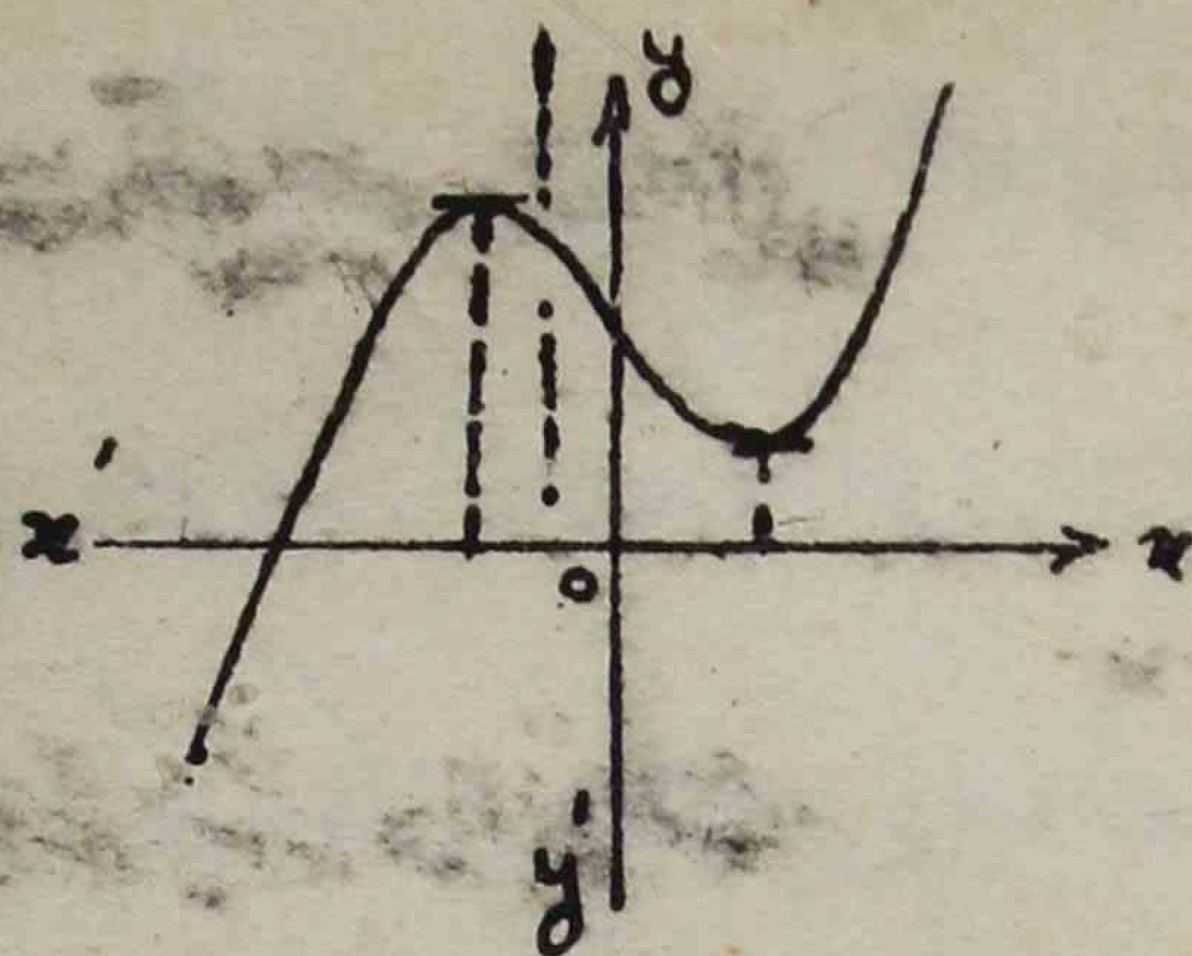
حال برحسب آنکه مقادیر ماکزیموم و مینیموم متحد العلامه یا مختلف العلامه بوده ویا یکی از آنها مساوی صفر باشد حالات مختلفه میتوان تشخیص داد و در اینصورت کافیست که علامت

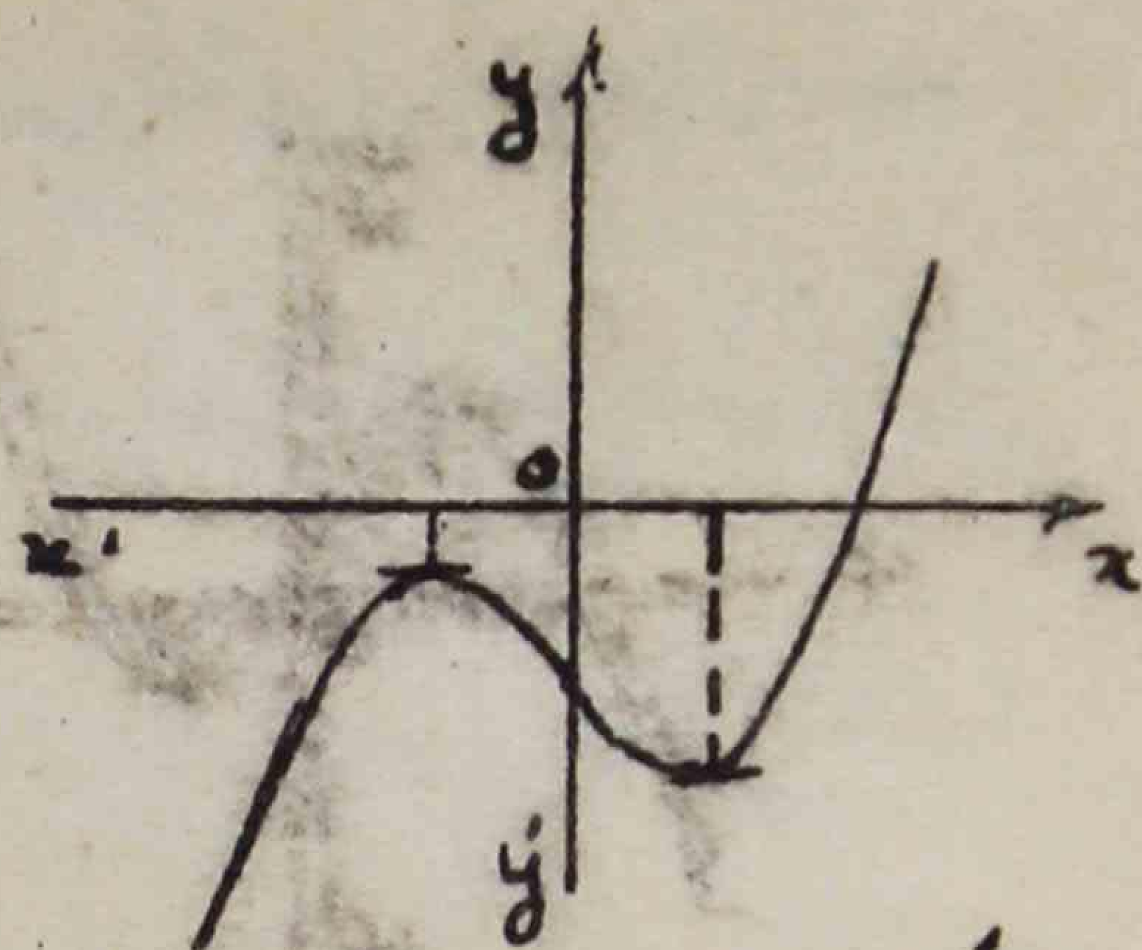
$$\left(-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right)\left(\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right)=q^2+\frac{4p^3}{27}$$

ویا علامت $4p^3+27q^2$ را در نظر گرفت ازینقرار

اولاً $4p^3+27q^2>0$ در اینصورت مقادیر ماکزیموم و مینیموم هر دو منفی یا هر دو مثبت خواهند بود و منحنی تغییرات بیکی از دو صورت ذیل خواهد بود .

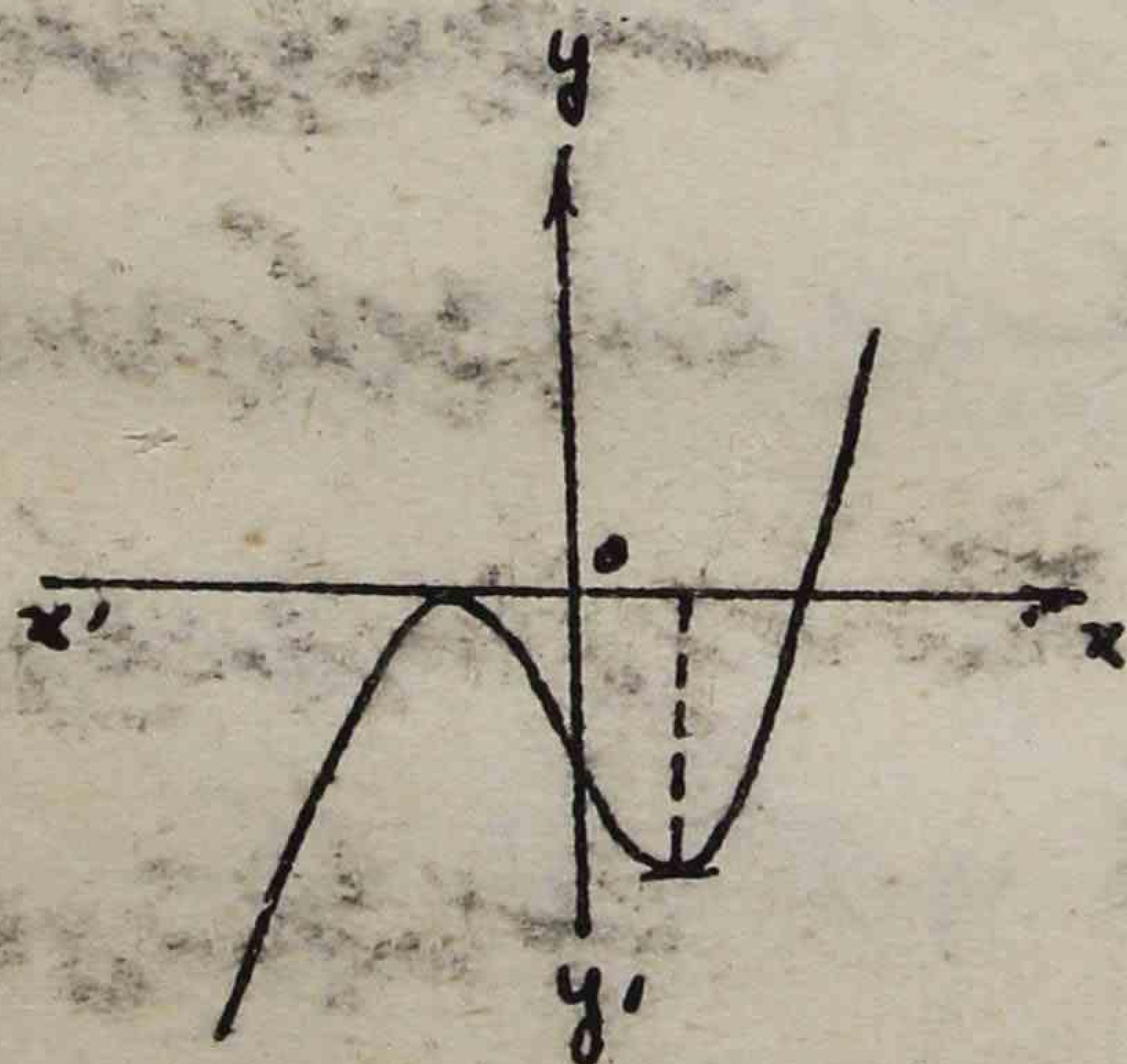


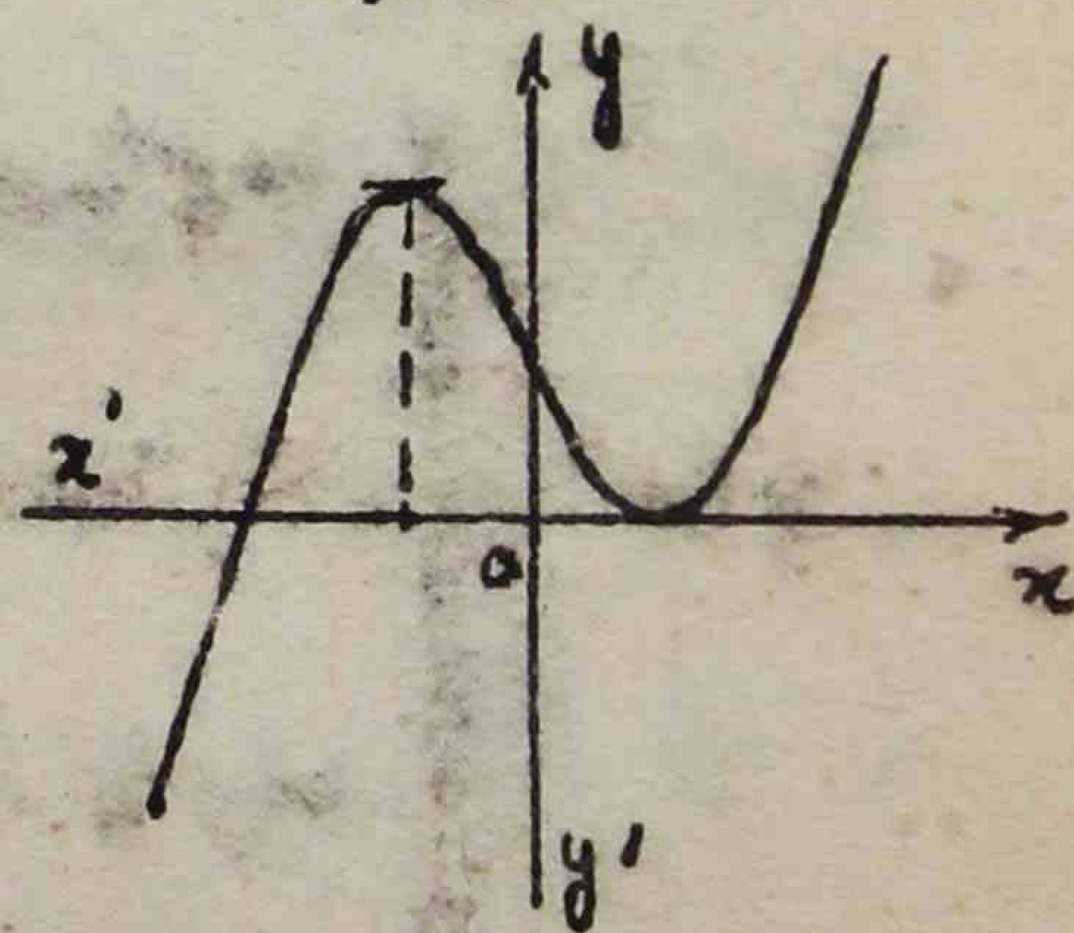




چنانکه از جدول و منحنی فوق ملاحظه میشود در اینحالت y فقط بازاء یک مقدار x صفر شده و بنابراین معادلهٔ $x^3 + px + q = 0$ دارای یک جواب میباشد

ثانیاً $4p^3 + 27q^2 = 0$ – در اینحالت ماکزیموم صفر و مینیموم منفی میباشد و یا مینیموم صفر و ماکزیموم مثبت میباشد و بنابراین منحنی تغییرات یکی از دو صورت ذیل میباشد:



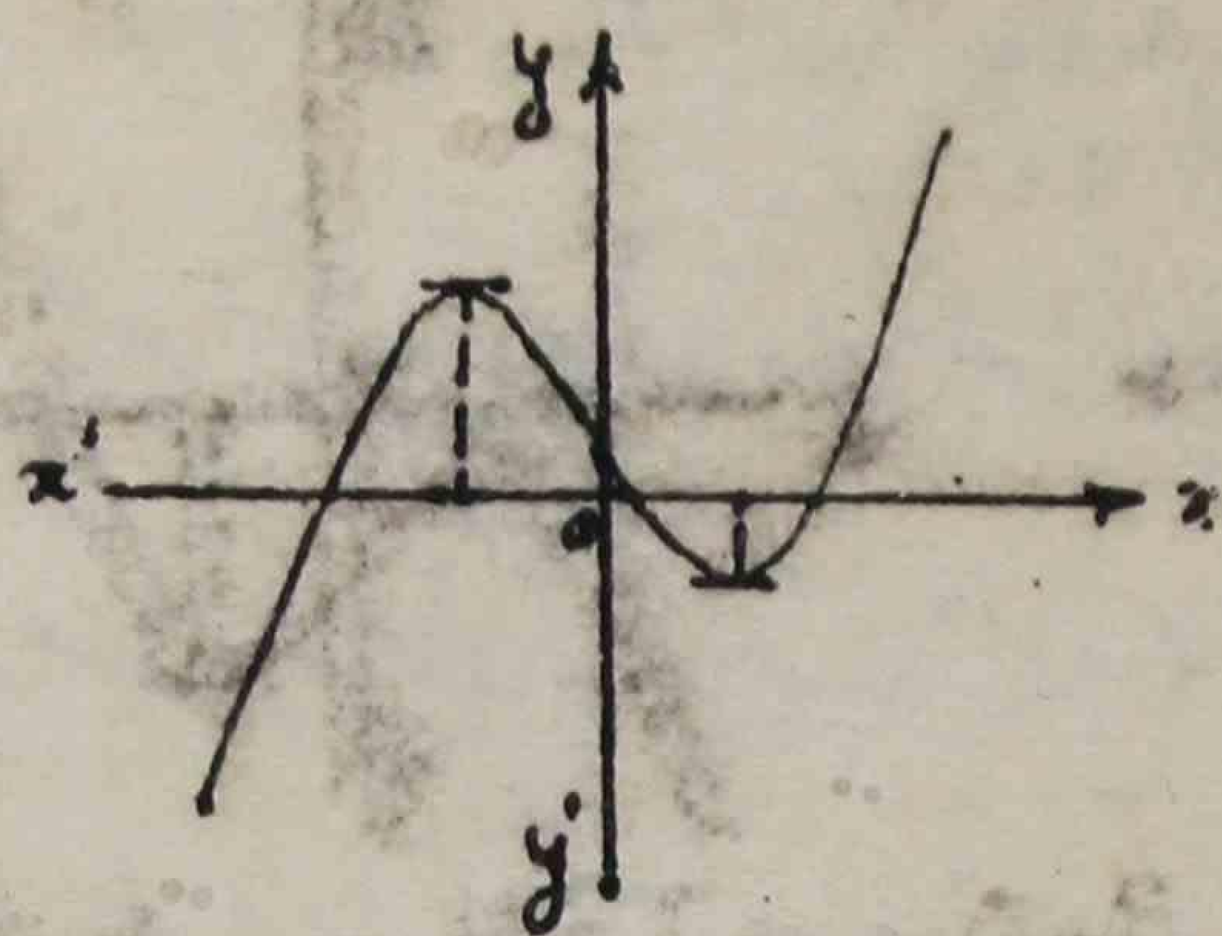


چنانکه از جدول و منحنی ملاحظه میشود در اینحالت منحنی در یک نقطه بر محور $x'x$ مماس و در یک نقطه آنرا قطع میکند بطوریکه معادلهٔ $x^3 + px + q = 0$ در اینحالت دارای یک ریشهٔ مضاعف و یک ریشهٔ ساده میباشد

ثالثاً $4p^3 + 27q^2 > 0$ – در اینحالت ماکزیموم مثبت و مینیموم منفی میباشد

و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل

میباشد



چنانکه ملاحظه میشود در اینحالت

منحنی محور $x'x$ را در سه نقطه قطع

نموده و بنابراین معادله $x^3+px+q=0$ دارای سه جواب میباشد

جدول ذیل را که حاوی خلاصه بحث در عده جوابهای معادله $x^3+px+q=0$

میباشد باید همواره در خاطر داشت

معادله فقط دارای یک ریشه است		$p>0$
معادله فقط دارای یک ریشه است	$4p^3+27q^2>0$	$p<0$
معادله دارای یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف است	$4p^3+27q^2=0$	
معادله دارای سه ریشه است	$4p^3+27q^2<0$	

تبصره - بسهولت میتوان ملاحظه نمود که هرگاه $4p^3+27q^2<0$ باشد

p منفی خواهد بود بطوریکه شرط لازم و کافی برای آنکه معادله درجه سوم

$x^3+px+q=0$ دارای سه ریشه باشد آنست که $4p^3+27q^2<0$ باشد

نقطه عطف تابع $y=x^3+px+q$ - مشتق ثانی تابع عبارتست



از $y''=6x$ که بازاء $x=0$ تغییر علامت میدهد بنابراین در همه حال منحنی تغییرات تابع فوق در نقطه $x=0$ یعنی نقطه تقاطع با محور $y'y$ دارای نقطه عطف میباشد که ضریب زاویه مماس بر آن برابر است با p وبسهولت میتوان تحقیق نمود که نقاط منحنی نسبت باین نقطه قرینه میباشند

مسائل

۱۶۸ - جدول ومنحنی تغییرات توابع ذیل را رسم نموده واز روی منحنی عدهٔ جوابهای معادلات $y=0$ وعلامات آنها را تحقیق کنید

$$y = x^3 - 3x + 4 \qquad y = x^3 + 2x + 1$$

$$y = x^3 - 3x + 2 \qquad y = x^3 - 6x + 6$$

۱۶۹ - تابع $y = x^3 + px + p$ مفروض است مطلوبست محاسبه مقادیر p بطریقیکه اولاً معادلهٔ $y=0$ دارای یک جواب ثانیاً دارای یک ریشه ساده ویک ریشه مضاعف ثالثاً دارای سه ریشه باشد وجدول ومنحنی تغییرات تابع را بازاء $p=0$ و $p=1$ و $p=-0.5$ و $p=\frac{-27}{4}$ رسم کنید

۱۷۰ - تابع $y = x^3 + (a-1)x + b$ که در آن a و b مختصات نقطه مفروضه M واقع درسطح دو محور است مفروض است مطلوبست مکان نقطه M برای آنکه معادله دارای یک یا دو یا سه جواب باشد

ماکزیموم و مینیموم بعضی عبارات

۹۶- **قضیهٔ ۱** - حاصلضرب چندین عامل مثبت متغیر که مجموعشان ثابت باشد ماکزیموم است هرگاه جمیع عوامل با یکدیگر مساوی باشند

m عامل مثبت متغیر x و y و z و ... و u و v را فرض میکنیم که مجموع آنها $S = x + y + z + \cdots + u + v = cte = ma$ باشد

حال ثابت میکنیم که حاصلضرب آنها هرچه که عوامل فوق بسمت a میل نماید ترقی مینماید

اثبات - واضح است که اگر عوامل فوق همگی مساوی a نباشند ناچار بعضی از آنها کوچکتر از a و بعضی بزرگتر از a خواهند بود مثلاً فرض میکنیم $x > a$ و $y < a$ باشد حال اگر $x = a + \alpha$ فرض شود حاصل ضرب عوامل فوق بصورت ذیل درمیآید :

$$P = (a+\alpha) \times y \times z \times \cdots \times u \times v \quad (1)$$

و چون از جملهٔ اول α را کم نموده و برای آنکه حاصل جمع تغییر نکند آنرا بجملهٔ دوم اضافه کنیم حاصل ضرب جدید P' بدست میآید از اینقرار :

$$P' = a \times (y+\alpha) \times z \times \cdots \times u \times v \quad (2)$$

که از تفریق رابطه (۱) از رابطه (۲) حاصل میشود :

$$P' - P = z \times \dots\dots \times u \times v \times d(a-y)$$

و چون $y < a$ فرض شده و بعلاوه d مثبت میباشد نتیجه میشود $P' - P > 0$

و یا $P' > P$

حال اگر این عمل را برای عوامل جدید رابطه (۲) تکرار کنیم حاصل ضرب دیگری مانند P'' بدست میآید بطریقی که $P'' > P'$ باین طریق هرچه عوامل فوق بسمت a میل نمایند حاصل ضرب آنها ترقی میکند و بنابراین در موقعی که همگی مساوی a شوند ماکزیموم میگردد

حالت مخصوص — درصورتیکه عوامل مفروض منحصر بدو جمله باشند قضیه را بطریق سهلتری میتوان ثابت نمود مثلاً اگر $S = x + y = C^{te} = 2a$ باشد چون $P = xy$ فرض شود از اتحاد $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

حاصل میشود $xy = P = a^2 - \frac{(x-y)^2}{4}$

و چنانکه در رابطه اخیر ملاحظه میشود P ماکزیموم است هرگاه $\frac{(x-y)^2}{4}$ و یا $x - y$ مینیموم و یا مساوی صفر باشد و از آنجا حاصل میشود $x = y$

تبصره — درصورتیکه نتواند $x = y$ باشد حاصل ضرب فوق ماکزیموم

میگردد هرگاه $x=y$ مینیموم باشد

۹۷ – **قضیهٔ ۲** – مجموع چندین عامل مثبت متغیر که حاصل ضربشان ثابت باشد مینیموم است هرگاه جمیع عوامل با یکدیگر مساوی باشند

m عامل مثبت متغیر x و y و z و ... و u و v را فرض میکنیم که حاصل ضربشان $P = x\times y\times z\times\cdots\times u\times v = C^{te} = a^m$ باشد حال ثابت میکنیم که مجموع آنها $S = x+y+z+\cdots+u+v$ هرچه عوامل فوق نسبت a میل نمایند تنزل مینماید

اثبات – هرگاه عوامل فوق همگی مساوی نباشند ناچار بعضی از آنها بزرگتر از a و بعضی کوچکتر از a خواهند بود مثلاً فرض میکنیم $x>a$ و $y<a$ باشد و چون $x=a+d$ فرض شود مجموع بصورت ذیل در میآید :

$$(1)\quad S=(a+d)+y+z+\cdots+u+v$$

حال از عامل اول d را کم میکنیم و برای آنکه حاصل ضرب تغییر نکند بجای y ، y' را قرار میدهیم بطریقیکه $(a+d)\times y = ay'$ و بنابراین $y'=\frac{(a+d)y}{a}$ باشد درانصورت حاصل جمع جدیدی بصورت ذیل بدست میآید :



$$(2)\quad s' = a + \frac{(a+d)y}{a} + z + \cdots + u + v$$

که از تفریق روابط (۱) و (۲) حاصل میشود : $s' - s = \frac{d(y-a)}{a}$

وچون $y > a$ و d مثبت میباشد نتیجه میشود $s' - s > 0$ ویا $s' > s$

حال اگر این عمل را برای عوامل جدید s' تکرار کنیم حاصل ضرب جدید دیگری

مانند s'' بدست میآید بطریقیکه $s'' > s'$ یعنی هرچه که جمل بسمت a میل کنند

مجموع تنزل مییابد و بنابراین در سوقتی که همگی مساوی a شوند مجموع مینیموم میگردد

حالت مخصوص – درصورتیکه عوامل فوق منحصر بدو جمله باشند

قضیه بطریقهٔ سهلتری اثبات میگردد مثلاً فرض میکنیم $P = xy = cte = a^2$ باشد

وچون $s = x + y$ فرض شود از اتحاد $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

حاصل میشود $s^2 = 4a^2 + (x-y)^2$ وچنانکه از عبارت اخیر ملاحظه میشود

s وبنابراین s مینیموم است هرگاه $(x-y)^2$ مینیموم ویا مساوی صفر

باشد واز آنجا حاصل میشود $x = y$

تبصره – درصورتیکه نتواند $x = y$ گردد مجموع فوق مینیموم است هرگاه

$x - y$ مینیموم باشد

۹۸ – **قضیهٔ ۳** – هرگاه x و y و z سه عامل مثبت متغیر

باشند بطریقیکه مجموع آنها $S = x + y + z = C^{te}$ باشد حاصل ضرب

قوای آنها $P = x^m \times y^n \times z^p$ ماکزیموم است هرگاه عوامل

فوق متناسب باشند با قوای خود یعنی $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ باشد

اثبات - واضح است که حاصل ضرب $x^m \times y^n \times z^p$ ماکزیموم

است هرگاه $\left(\frac{x}{m}\right)^m \times \left(\frac{y}{n}\right)^n \times \left(\frac{z}{p}\right)^p = \frac{x^m \times y^n \times z^p}{m^m \times n^n \times p^p}$

ویا $\underbrace{\frac{x}{m} \times \frac{x}{m} \times \cdots}_{\text{مرتبه } m} \times \underbrace{\frac{y}{n} \times \frac{y}{n} \times \cdots}_{\text{مرتبه } n} \times \underbrace{\frac{z}{p} \times \frac{z}{p} \times \cdots}_{\text{مرتبه } p}$

ماکزیموم باشد و چون مجموع عوامل فوق $\frac{mx}{m} + \frac{ny}{n} + \frac{pz}{p} = x + y + z = C^{te}$

میباشد لذا بر طبق قضیه ۱ حاصل ضرب آنها ماکزیموم است هرگاه جمیع عوامل

با یکدیگر مساوی باشند یعنی $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ باشد

۹۹- **قضیه ۲** - هرگاه x و y و z سه متغیر مثبت باشند

بطریقیکه حاصل ضرب قوای آنها $x^m \times y^n \times z^p = C^{te}$ باشد مجموع

$S = x + y + z$ مینیموم است هرگاه $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$

باشد.

اثبات - چون حاصل ضرب $x^m \times y^n \times z^p$ ثابت میباشد

لذا $\left(\frac{x}{m}\right)^m \times \left(\frac{y}{n}\right)^n \times \left(\frac{z}{p}\right)^p = \frac{x^m \times y^n \times z^p}{m^m \times n^n \times p^p}$

و یا $\overbrace{\frac{z}{p}\times\frac{z}{p}\times\cdots}^{p\ \text{مرتبه}}\times\overbrace{\frac{y}{n}\times\frac{y}{n}\times\cdots}^{n\ \text{مرتبه}}\times\overbrace{\frac{x}{m}\times\frac{x}{m}\times\cdots}^{m\ \text{مرتبه}}$

نیز ثابت خواهد بود و چون حاصل ضرب عوامل فوق ثابت است لذا بر وفق

قضیهٔ ۲ مجموع آنها $S=\frac{mx}{m}+\frac{ny}{n}+\frac{pz}{p}=x+y+z$ مینیموم است

هرگاه جمیع عوامل مساوی باشند یعنی $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ باشد

موارد استعمال قضایای فوق

مسئله ۱ - مابین مثلثات بمحیط ثابت $2p$ مطلوبست مثلثی که مساحت آن ماکزیموم باشد

دستور مساحت مثلث بنابر آنکه اضلاع آن a و b و c و محیط آن $2p$ فرض شود عبارتست از :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

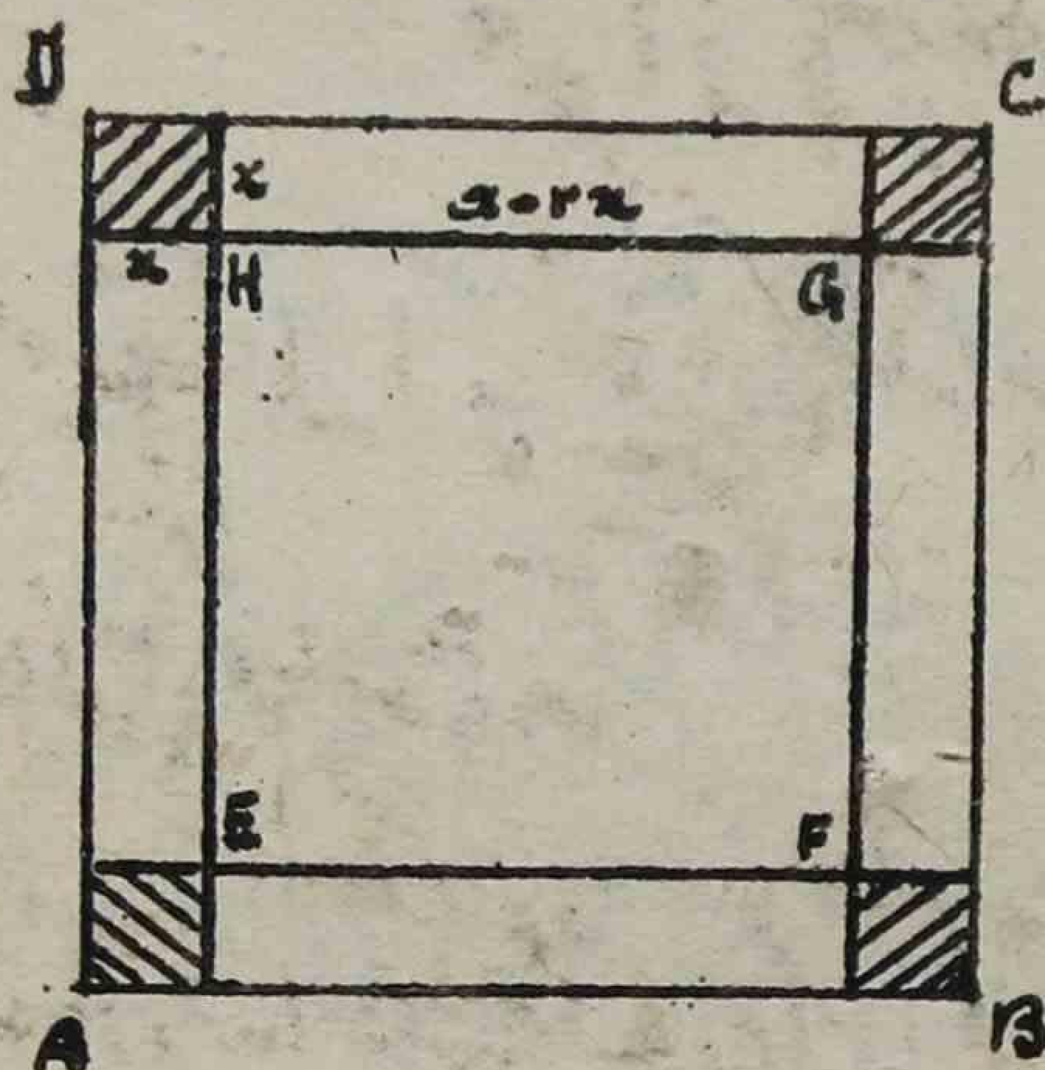
حال مساحت S ماکزیموم است هرگاه $(p-a)(p-b)(p-c)$ ماکزیموم باشد و چون مجموع عوامل فوق $p-a+p-b+p-c=p=$ ثابت میباشد

لذا حاصل ضرب آنها ماکزیموم است هرگاه $p-a=p-b=p-c$

و یا $a=b=c$ باشد ازینقرار مثلث ماکزیموم مثلث متساوی الاضلاع بضلع $\frac{2p}{3}$ میباشد و مساحت مثلث ماکزیموم عبارت میگردد از :

$$S_M = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

مسئله ۲ - صفحه مقوائی ABCD را بضلع a فرض نموده از چهار گوشه آن چهار مربع بضلع x بریده و با بقیه سطح جعبهٔ میسازیم بقاعدهٔ مربع EFGH مطلوبست تعیین x بطریقی که حجم جعبه ماکزیموم باشد



ضلع قاعدهٔ جعبه $a-2x$ و ارتفاع آن x و بنابراین حجم آن $V = x(a-2x)^2$ میباشد

حجم فوق ماکزیموم است هرگاه $2x(a-2x)$ ماکزیموم باشد و چون مجموع $2x + (a-2x) = a$ ثابت میباشد لذا بر طبق قضیه ۳ حاصل ضرب قوای آنها ماکزیموم است هرگاه $2x = \frac{a-2x}{2}$ باشد و از آنجا $x = \frac{a}{6}$ و در اینصورت حجم ماکزیموم عبارت میگردد از $V_M = \frac{2a^3}{27}$

مسئله ۳ - مابین مخروطهای بحجم $\frac{1}{3}\pi a^3$ مطلوبست مخروطی که سطح جانبی آن مینیموم باشد



فرض میکنیم x شعاع قاعده و y ارتفاع مخروط باشد در اینصورت

بنا بفرض $\frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi a^3$ و بنابراین $x^2 y = a^3$ خواهد بود

و چون سطح جانبی مخروط فوق را حساب کنیم حاصل میشود $S = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$

حال سطح فوق مینیموم است هرگاه $x\sqrt{x^2+y^2}$ و یا مجذور آن $x^2(x^2+y^2)$

مینیموم باشد و چون در عبارت اخیر بجای y مساوی آن $\frac{a^3}{x^2}$ را قرار دهیم

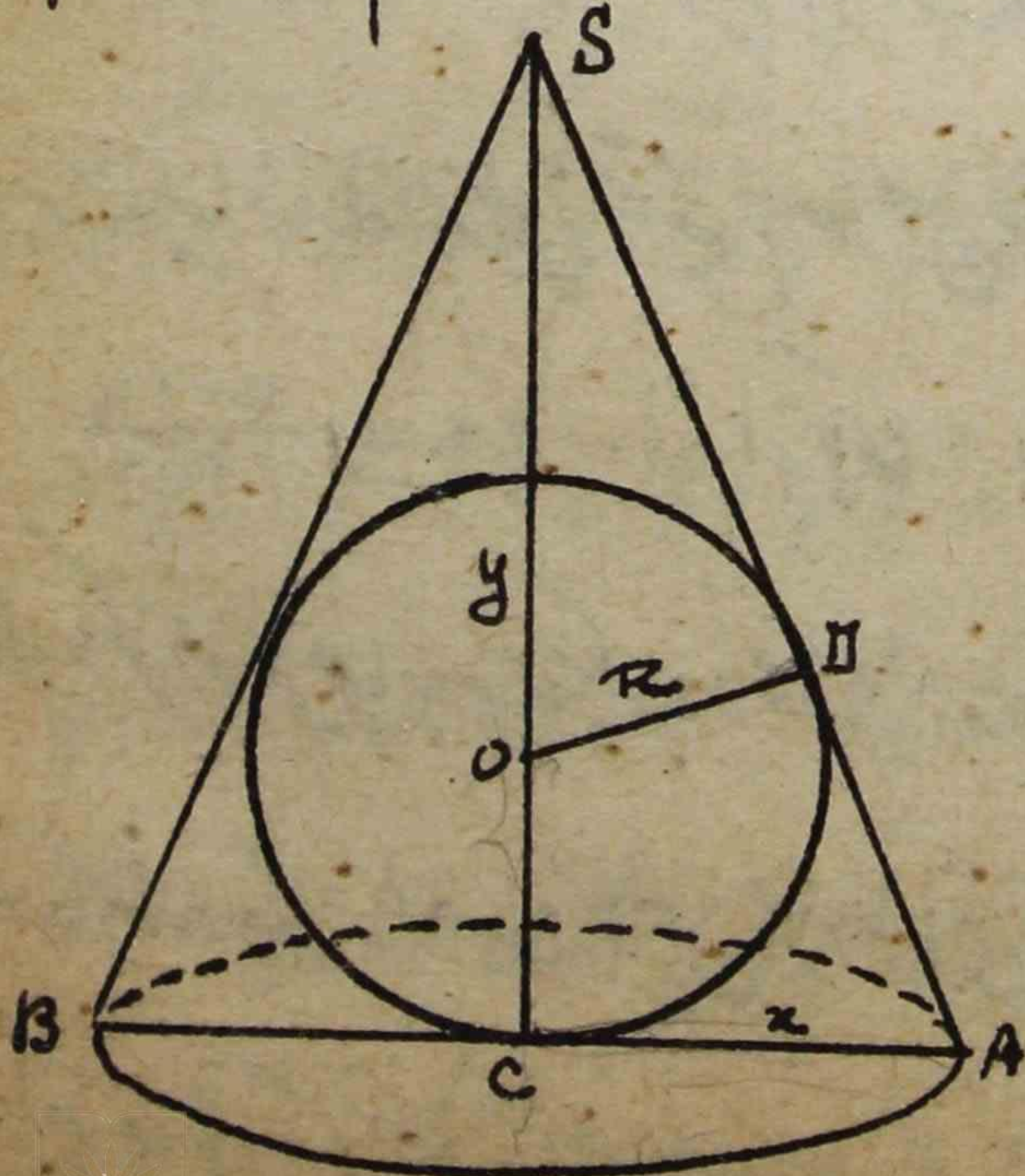
عبارت فوق بصورت $x^4 + \frac{a^6}{x^2} = (x^2)^2 + \frac{a^6}{x^2}$ در میآید

که در آن چون حاصل ضرب $x^2 \times \frac{a^6}{x^2} = a^6$ ثابت میباشد

لذا مجموع قوای آنها مینیموم است هرگاه $\frac{x^2}{2} = \frac{a^6}{x^2}$ و از آنجا

$x = a\sqrt{2a^3}$ باشد

مسئله ۴ – بر کرهٔ بشعاع R مخروطی محیط کنید که حجم آن مینیموم باشد



فرض میکنیم x شعاع قاعدهٔ مخروط و y ارتفاع آن باشد در اینصورت $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ خواهد بود ولی از تشابه دو مثلث SOD و SAC حاصل میشود:

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{\sqrt{y(y-2R)}}$$

وازآنجا $x = \frac{Ry}{\sqrt{y(y-2R)}}$

بطوریکه دستور حجم مخروط برحسب y عبارت میگردد از :

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi R^2 \times \frac{y^2}{y-2R}$$

حال حجم V مینیموم است هرگاه $\frac{y^2}{y-2R}$ مینیموم بوده ویا عکس آن $\frac{y-2R}{y^2}$ ماکزیموم باشد ولی عبارت اخیر رامیتوان مرتباً بصور ذیل نوشت :

$$\frac{y-2R}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{2R}{y^2} = \frac{1}{y}\left(1-\frac{2R}{y}\right)$$

که ماکزیموم است هرگاه $\frac{2R}{y}\left(1-\frac{2R}{y}\right)$ ماکزیموم باشد وچون مجموع دو عامل فوق $\frac{2R}{y} + \left(1-\frac{2R}{y}\right) = 1$ ثابت میباشد لذا حاصل ضرب آنها ماکزیموم میگردد درموقعیکه $\frac{2R}{y} = 1 - \frac{2R}{y}$ وازآنجا $y = 4R$ باشد ودراینصورت $x = R\sqrt{2}$ وحجم مخروط مینیموم $V = \frac{8\pi R^3}{3}$ خواهد بود

بحث درمنحنی معادلهٔ درجه دوم کامل

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

۱۰۰- چون طرفین معادله مفروض رابر x^2 تقسیم حاصل میشود :

$$a + b\times\frac{y}{x} + c\times\frac{y^2}{x^2} + d\times\frac{1}{x} + e\times\frac{1}{x}\times\frac{y}{x} + \frac{f}{x^2} = 0$$

حال اگر درمعادلهٔ فوق فرض کنیم x میل کند بسمت ∞ بنابرآنچه میدانیم حد



$\frac{y}{x}$ عبارت میگردد از ضریب زاویه خط مجانب منحنی که چون آنرا مساوی m فرض کنیم معادلهٔ فوق بصورت ذیل در میآید :

$a + bm + cm^2 = 0$ ویا $cm^2 + bm + a = 0$

که معادلهٔ درجهٔ دوّمی است برحسب m وچون آنرا حل کنیم حاصل میشود :

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

حال برحسب آنکه $b^2 - 4ac < 0$ یا $b^2 - 4ac = 0$ ویا $b^2 - 4ac > 0$ باشد منحنی $f(x, y) = 0$ دارای مجانب نبوده ویا آنکه دارای دو ویا یک خط مجانب میباشد در صورت اوّل منحنی $f(x, y) = 0$ از نوع بیضی (دایره نیز حالت خاصی از بیضی میباشد) و در صورت دوّم از نوع سهمی و در صورت سوّم از نوع هذلولی میباشد

حل وبحث معادلهٔ کامل درجهٔ سوّم

$$(1)\quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

۱۰۱ - حل هر معادله درجه سوّم کامل را میتوان بوسیلهٔ حذف جملهٔ درجهٔ دوم آن بحل یک معادلهٔ ناقص بصورت $(2)\ x^3 + px + q = 0$ تبدیل نمود چه اگر در معادلهٔ (۱) فرض کنیم $(3)\ x = z - \frac{b}{3a}$ باشد معادلهٔ فوق بصورت

ذیل در میآید :

$$x^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}x + \frac{27a^2d - b^3 - 9abc}{27a^3} = 0$$

که در آن چون ضریب جمله درجهٔ اول را p و مقدار معلوم را q فرض کنیم معادله بصورت $x^3 + px + q = 0$ در میآید حال اگر معادلهٔ اخیر را حل کنیم x معلوم میگردد که چون آنرا در رابطه (۳) قرار دهیم x جواب معادلهٔ (۱) بدست میآید

حل معادلهٔ $x^3 + px + q = 0$ (۱) بطریق مثلثاتی

۱۰۳ - در مثلثات تحقیق نموده ایم که :

$$\cos a = 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3}$$

و یا

$$\cos^3\frac{a}{3} - \frac{3}{4}\cos\frac{a}{3} - \frac{1}{4}\cos a = 0 \qquad (2)$$

حال فرض میکنیم $x = m\cos\frac{a}{3}$ (۳) باشد در اینصورت معادلهٔ (۱) بصورت ذیل در میآید

$$m^3\cos^3\frac{a}{3} + pm\cos\frac{a}{3} + q = 0$$

و یا

$$\cos^3\frac{a}{3} + \frac{p}{m^2}\cos\frac{a}{3} + \frac{q}{m^3} = 0 \qquad (4)$$

و چون معادلهٔ (۴) را با اتحاد (۲) مقایسه نمائیم حاصل میشود :



$$\frac{p}{m^2} = \frac{-3}{4} \qquad \frac{q}{m^3} = -\frac{1}{4}\cos\alpha$$

و از آنجا

$$m = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad \cos\alpha = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}$$

حال فرض میکنیم که θ کوچکترین قوس مثبتی باشد بطریقی که $\cos\theta = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}$ باشد در اینصورت حاصل میشود $\cos\alpha = \cos\theta$ و از آنجا $\alpha = 2k\pi \pm \theta$

و بنابراین $\frac{\alpha}{3} = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\theta}{3}$ که جوابهای محصور مابین ۰ و 2π در آن عبارت میگردد از :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{3} = \frac{\theta}{3} \\ \frac{\alpha}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\theta}{3} \\ \frac{\alpha}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\alpha}{3} = 2\pi - \frac{\theta}{3} \\ \frac{\alpha}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3} = 2\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right) \\ \frac{\alpha}{3} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\theta}{3} = 2\pi - \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) \end{cases}$$

و چون در رابطهٔ (۳) بجای m و $\frac{\alpha}{3}$ مقادیر آنها را قرار دهیم با ملاحظه آنکه شش دسته قوسهای فوق دو بدو دارای یک $\cos$ میباشند جوابهای معادله (۱) بدست میآید از نیقرار :

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3} \\ x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right) \\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) \end{cases}$$

بحث — واضح است برای آنکه معادله (۱) دارای جواب باشد باید p و q موجود باشند و برای آن لازم است نامساویهای ذیل محقق باشند :

$p<0$ و یا $-\frac{p}{3}>0$

$4p^3+27q^2<0$ و یا $\frac{27q^2}{-4p^3}<1$ و یا $-1<\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}<1$

ولی باید دانست که شرط دوم تنهائی کافیست چه لازمهٔ این شرط آنست که $p<0$ باشد در حالتیکه $4p^3+27q^2<0$ باشد معادله را بطریقهٔ جبری ذیل حل میکنیم :

حل جبری معادله $x^3+px+q=0$ (۱)

۱۰۳ — در معادله (۱) فرض میکنیم $x=y+z$ (۲) باشد در اینصورت معادله بصورت ذیل درمیآید :

$$y^3+(3yz+p)(y+z)+z^3+q=0 \quad (۳)$$

حال میتوان مقادیر y و z را بطریقی انتخاب نمود که ضریب $y+z$ در معادله (۳) مساوی صفر گردد یعنی $3yz+p=0$ و از آنجا $yz=-\frac{p}{3}$ باشد در اینصورت از معادله (۳) حاصل میشود :

$y^3+z^3+q=0$ و از آنجا $y^3+z^3=-q$



و چون $y^3 z^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$ فرض شده است لذا y^3 و z^3 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم ذیل خواهند بود :

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (4)$$

که چون آنرا حل کنیم حاصل میشود :

$$u = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{3}}$$

و بنابراین :

$$\begin{cases} y^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{3}} \\ z^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{3}} \end{cases}$$

حال از روابط اخیر کعب استخراج میکنیم تا حاصل شود :

$$(5)\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{3}}} \\ y_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\, y_1 \\ y_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\, y_1 \end{cases} \qquad (6)\begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{3}}} \\ z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\, z_1 \\ z_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\, z_1 \end{cases}$$

$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ کعبهای موهومی واحد هستند چه اگر کعب واحد را مساوی x فرض کنیم حاصل میشود $x^3 = 1$ و یا $x^3 - 1 = 0$ که آنرا بصورت ذیل میتوان نوشت

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

که جوابهای آن عبارتست از $x = 1$ و $x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

حال بر طبق رابطه (۳) مقادیر y و z را نظیر بنظیر جمع میکنیم تا جوابهای معادلهٔ مفروض بدست آید از اینقرار :



$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{3}}} \\ x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(y_1+z_1) \\ x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(y_2+z_2) \end{cases}$$

دستورات فوق موسومند بدستورات Cardan

بحث – در دستورات فوق شرط جواب آنست که :

$\frac{4p^3+27q^2}{3} \geq 0$ ویا $4p^3+27q^2 \geq 0$

باشد

تابع اوّلیهٔ – سطح منحنی

۱۰۴ – **تعریف** – تابع اولیه $y = f(x)$ عبارتست از تابع $y = F(x)$ که مشتق آن $y = f(x)$ باشد

هرگاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد کلیه توابع $F(x)+c$ که در آنها c نمایش مقداریست ثابت تابع اوّلیه $f(x)$ خواهند بود بطوریکه برای هر تابعی بینهایت تابع اوّلیه میتوان فرض نمود که تفاضل آنها مقداریست ثابت



اینک در جدول ذیل تابع اوّلیه بعضی توابع را که در حل مسائل مورد احتیاج است یاد داشت مینمائیم

تابع	تابع اوّلیه
$y = a$	$y = ax + c$ (c مقداریست ثابت)
$y = ax^m$	$y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} + c$
$y = \sin x$	$y = -\cos x + c$
$y = a \sin mx$	$y = \frac{-a}{m} \cos mx + c$
$y = \cos x$	$y = \sin x + c$
$y = a \cos mx$	$y = \frac{a}{m} \sin mx + c$
$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \text{tg}\, x + c$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$y = -\text{cotg}\, x + c$
$y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) + c$
$y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	$y = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin 2x) + c$
$y = \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$	$y = \text{tg}\, x - x + c$

۱۰۵- **قضیه**- هرگاه تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ a و b اتصالی

باشد اولاً سطح محدود مابین منحنی و محور $x'x$ و اردنه ثابت بطول a

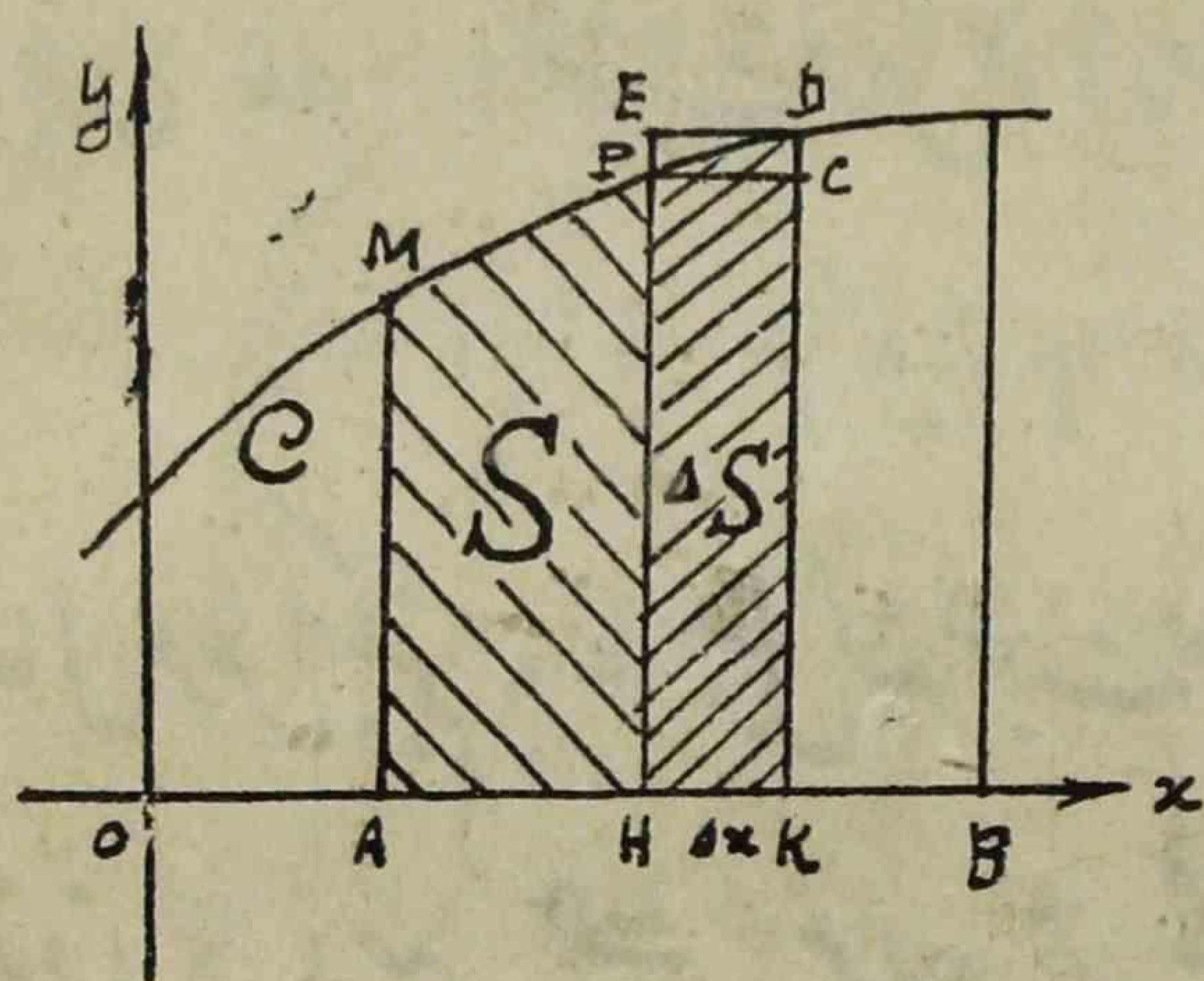
و اردنه متغیر بطول x $(a < x < b)$ تابعی است از x ثانیاً

مشتق این تابع برابر است با y اردنه بطول x

فرض میکنیم منحنی c نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ باشد که در فاصله

$\overline{OA} = a$ و $\overline{OB} = b$

اتصالی باشد



اردنه متغیر $\overline{HP}$ را

بطول $\overline{OH} = x$ $(a < x < b)$

فرض میکنیم

اولاً واضح است که سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ و اردنه ثابت $\overline{AM}$

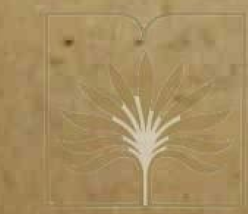
و اردنه متغیر $\overline{HP}$ بطول $\overline{OH} = x$ برحسب x تغییر نموده و بنابراین تابعی

است از x بطوریکه میتوان نوشت $S = F(x)$

ثانیاً باید تحقیق نمود که $S' = F'(x) = y = f(x)$ زیرا اگر به $\overline{OH} = x$

نموی مانند $\overline{HK} = \Delta x$ بدهیم برای y نیز نموی مانند $\overline{CD} = \Delta y$ و برای

سطح مختلط الخطوط AHPM نیز نموی حاصل میشود برابر با HKDP



که آنرا به ΔS نمایش میدهیم حال بسهولت ملاحظه میشود که سطح ΔS محصور است

مابین دو مستطیل $HKCP$ و $HKDE$ بطوریکه میتوان نوشت :

$$HKCP < HKDP < HKDE$$

و یا

$$y \times \Delta x < \Delta S < \Delta x (y + \Delta y)$$

وچون Δx را مثبت فرض نموده طرفین را برآن تقسیم کنیم حاصل میشود :

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$$

حال فرض میکنیم Δx میل کند بسمت صفر درایصورت حد طرفین نامساوی

فوق y و حد $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ چون S تابعی است از x عبارتست از S'

بطوریکه میتوان نوشت $S' = y = f(x)$

درحالتیکه Δx را منفی فرض کنیم نامساویهای فوق درجهت مخالف

برقرار بوده وهمان نتیجه بدست میآید

۱۰۶- **مورد استعمال- مسئله کلی-** تابع $y = f(x)$ که

درفاصله a و b اتصالی است مفروض است مطلوبست عبارت سطح

حادث مابین منحنی ومحور $x'x$ و عرض ثابت بطول a و عرض متغیر بطول

x $(a < x < b)$

بنا بر قضیه فوق $f(x) = y = S'$ میباشد یعنی عبارت سطح مطلوب یکی

از توابع اولیهٔ $y = f(x)$ میباشد بطوریکه هرگاه سطح فوق را به S بنامیم

حاصل میشود: $S = F(x) + C$

حال برای محاسبهٔ مقدار ثابت C ملاحظه میکنیم که سطح فوق بازاء

$x = a$ صفر میگردد بنابراین $S = F(a) + C = 0$ و از آنجا

$C = -F(a)$ خواهد بود بطوریکه دستور سطح مطلوب عبارت میگردد از:

$$S = F(x) - F(a)$$

دستور اخیر را برای محاسبهٔ سطوح منحنی باید همواره در خاطر داشت

معمولاً سطح حادث مابین منحنی $y = f(x)$ و محور $x'x$ و اردونه های بطول

a و b را بصورت ذیل نمایش میدهند $\int_a^b f(x)\,dx$

مثال ۱ – منحنی $y = x^2 + 2x - 3$ مفروض است مطلوبست اولاً

محاسبهٔ سطح محصور مابین منحنی و محور $x'x$ و عرض نقطه بطول ۲ ثانیاً محاسبهٔ

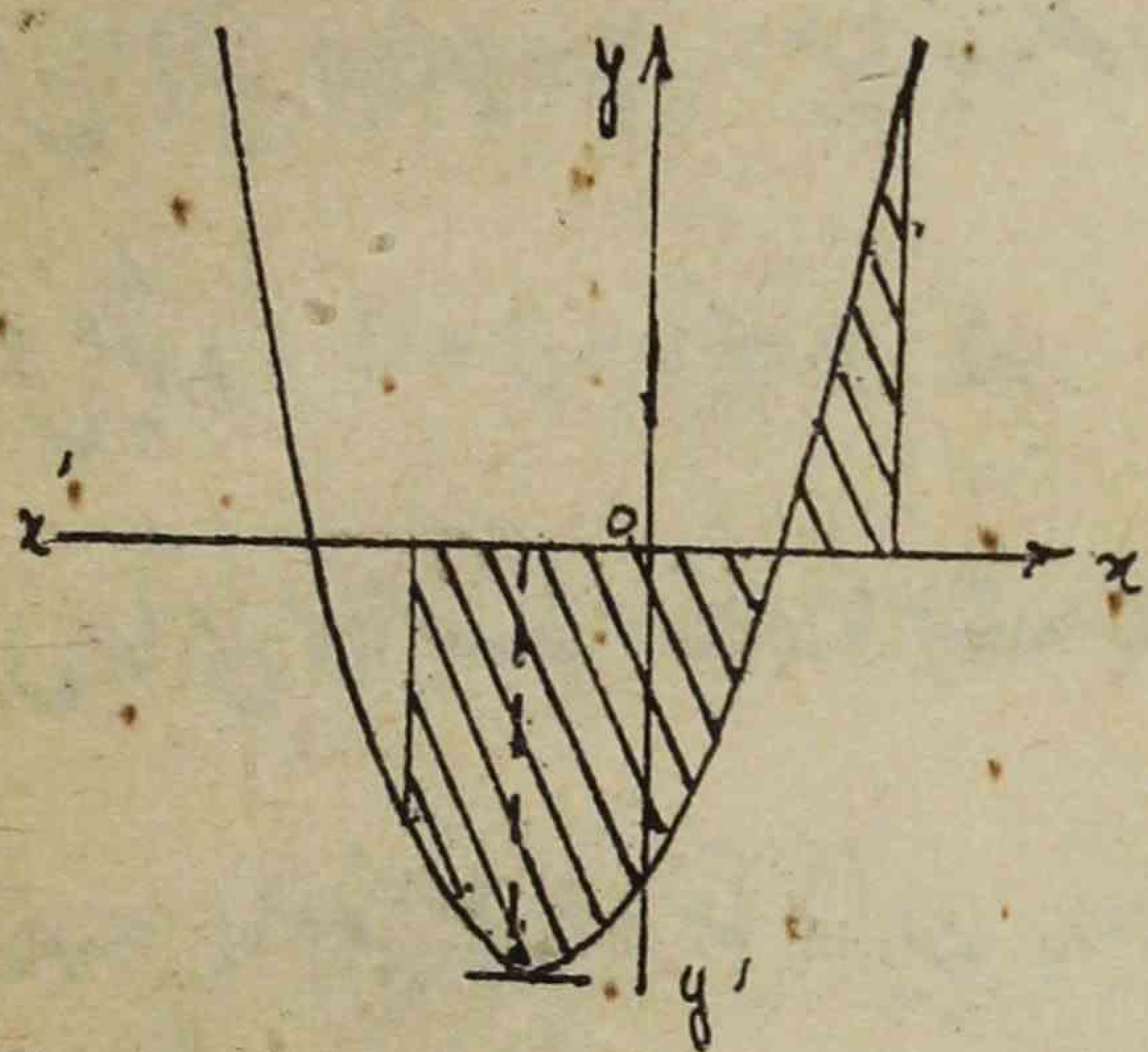
سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ و محور $y'y$ ثالثاً سطح حادث مابین

منحنی و محور $x'x$ و عرضهای نقاط بطول ۲– و ۲+

چون $F(x)$ را حساب کنیم حاصل میشود:



$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$$



اولاً سطح محصور مابین منحنی و محور $x'x$ و

عرض نقطه بطول ۲ عبارت میگردد

از $S_1 = F(2) - F(1) = \frac{7}{3}$

ثانیاً سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$

و محور $y'y$ برابر است با $S_2 = F(1) - F(0) = \frac{-5}{3}$ که چون مقصود

قدر مطلق سطح است مقدار آن مساوی میگردد با $\frac{5}{3}$

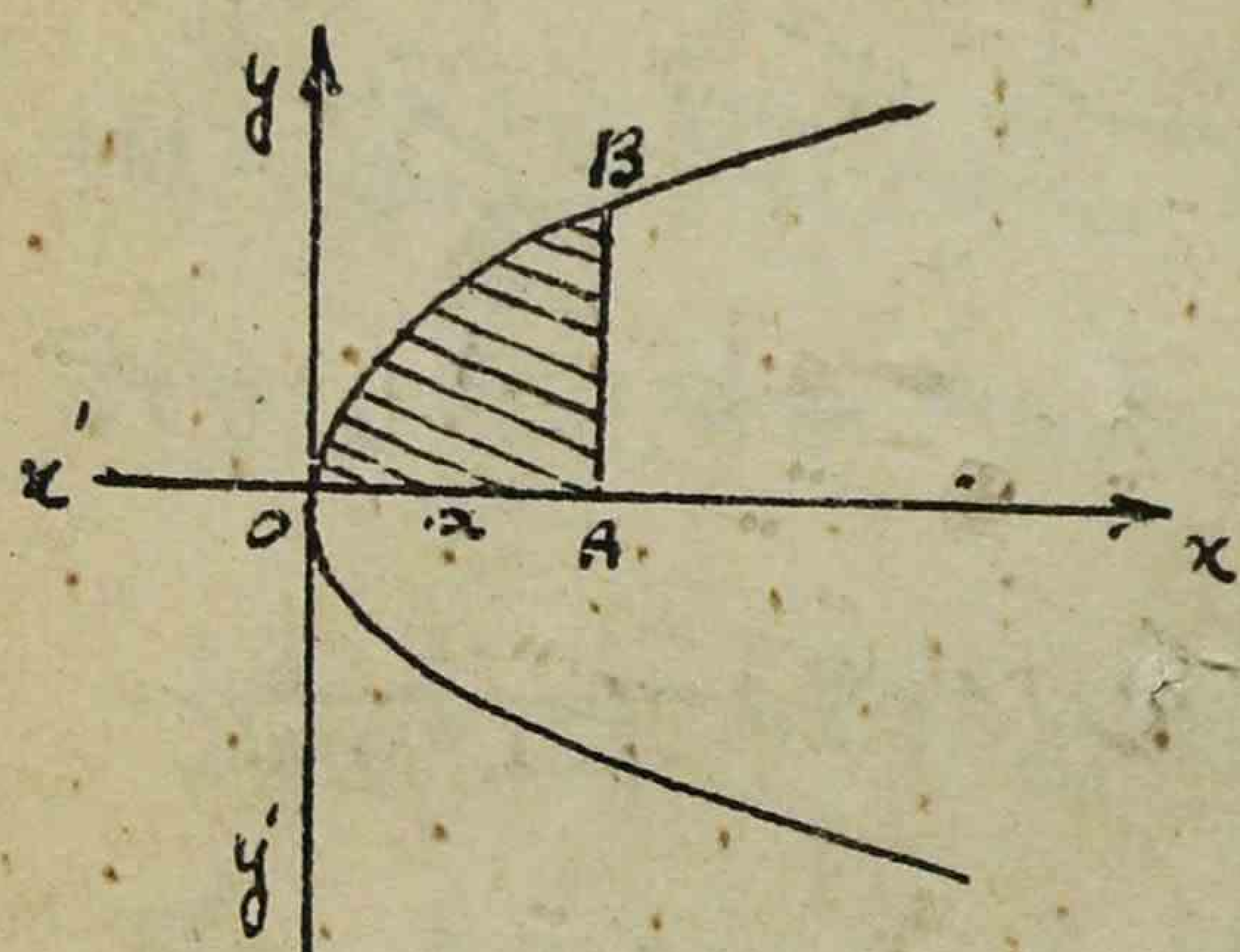
ثالثاً برای محاسبهٔ سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ و عرضهای نقاط بطول ۲ و ۲- ملاحظه میکنیم که سطح مزبور از دو قسمت تشکیل یافته است که یکی مرکب است از ارونه های مثبت و در فوق محور $x'x$ واقع بوده وبنابراین مقدار آن مثبت است و دیگری مرکب است از ارونه های منفی و در زیر محور $x'x$ واقع بوده وبنابراین مقدار آن منفی است بطوریکه $F(2) - F(-2)$ مجموع جبری دو سطح فوق خواهد بود ولی چون همواره منظور اندازهٔ قدر مطلق سطح است لذا دو جزء فوق را s_1 و s_2 فرض نموده هریک را جداگانه حساب میکنیم وبعد قدر مطلق آنها را بایکدیگر جمع مینمائیم ازینقرار حاصل میشود :

$$s = F(۲) - F(۱) = \frac{۷}{۳}$$

$$s' = F(۱) - F(-۲) = -۹$$

بنابراین $S_۳ = \frac{۷}{۳} + ۹ = \frac{۳۴}{۳}$ سطح مطلوب خواهد بود

مثال ۲ - سهمی $y^۲ = ۲px$ مفروض است مطلوبست محاسبهٔ سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ و اروئه بطول a



چون معادله را بجسب y حل کنیم

حاصل میشود $y = \pm\sqrt{۲px} = \pm\sqrt{۲p}\, x^{\frac{۱}{۲}}$

حال سطح OAB را حساب میکنیم که در آن

منحنی OB نظیر معادلهٔ $y = +\sqrt{۲px}$ میباشد

بانطریق که $F(x)$ یکی از توابع اولیه $y = \sqrt{۲p} \times x^{\frac{۱}{۲}}$ را حساب میکنیم تا حاصل شود $F(x) = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲p}\; x^{\frac{۳}{۲}}$ و بنابراین سطح مطلوب عبارت میگردد

از :
$$S = F(a) - F(o) = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲p}\; a^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲pa^۳}$$

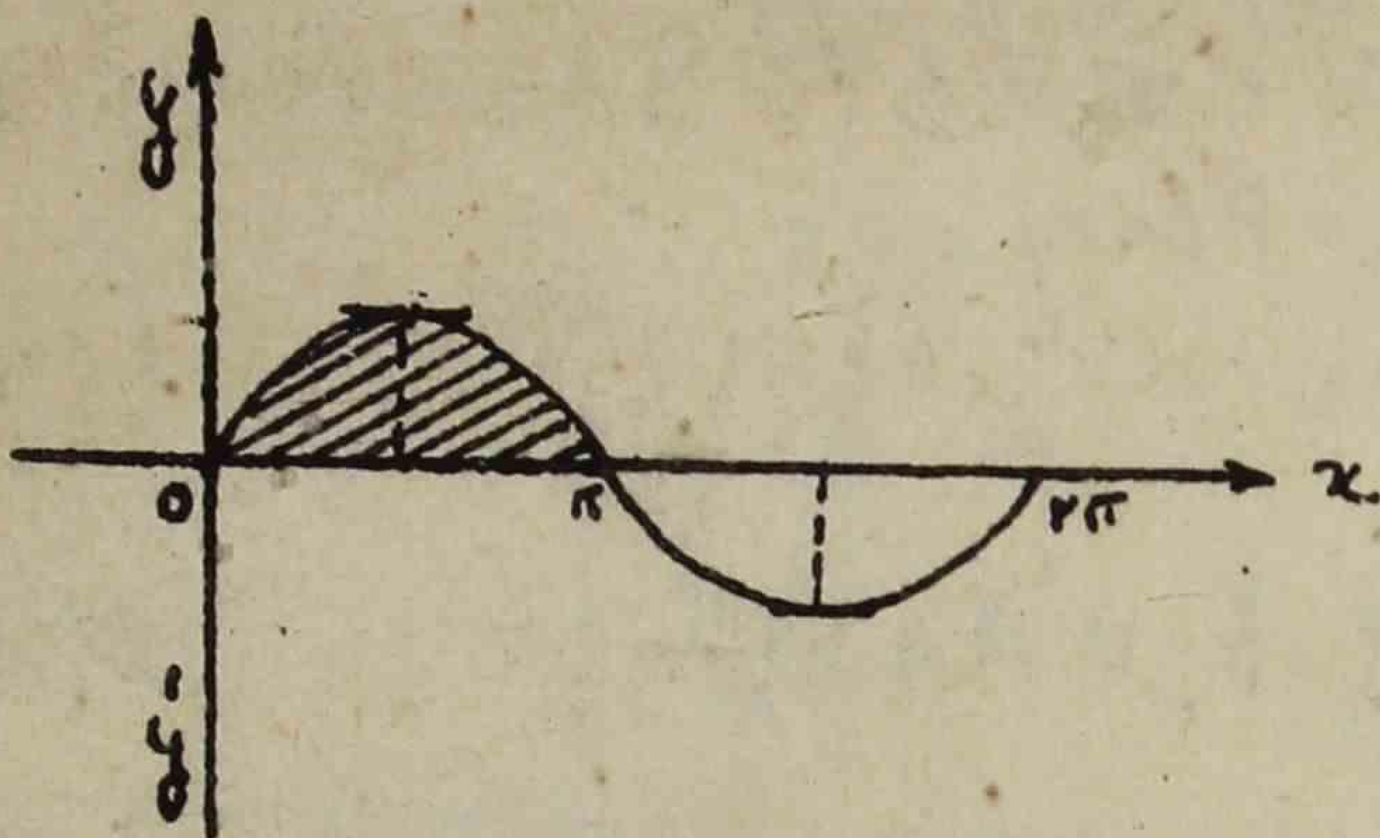
مثال ۳ - مطلوبست سطح حادث مابین منحنی $y = ۸x$ و محور $x'x$ قسمتی که در بالای محور واقع است (x محصور مابین ۰ و ۳ میباشد)

در مثال فوق $F(x) = -۴x$ وسطح مطلوب محصور است مابین

ا ر دنه بطول ۰ و π و بنابراین

مقدار آن برابر میگردد با

$$S = F(\pi) - F(0) = 2$$



مسائل

۱۷۱ - منحنی تغییرات توابع ذیل را رسم نموده سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ و عرضهای نقاط بطول ۱ و ۲ را حساب کنید :

$$y = x^3 \qquad y = x + \frac{1}{x^4} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{(x-3)^2} \qquad y = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad y = 2\cos 3x$$

۱۷۲ - مطلوبست محاسبهٔ سطح حادث مابین منحنی $y = -x^4 + 3x^2 + 4$ و محور $x'x$

۱۷۳ - سطح حادث مابین منحنی $y = \sin x - 2\cos x$ و محور $x'x$ و عرضهای نقاط بطول $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را حساب کنید

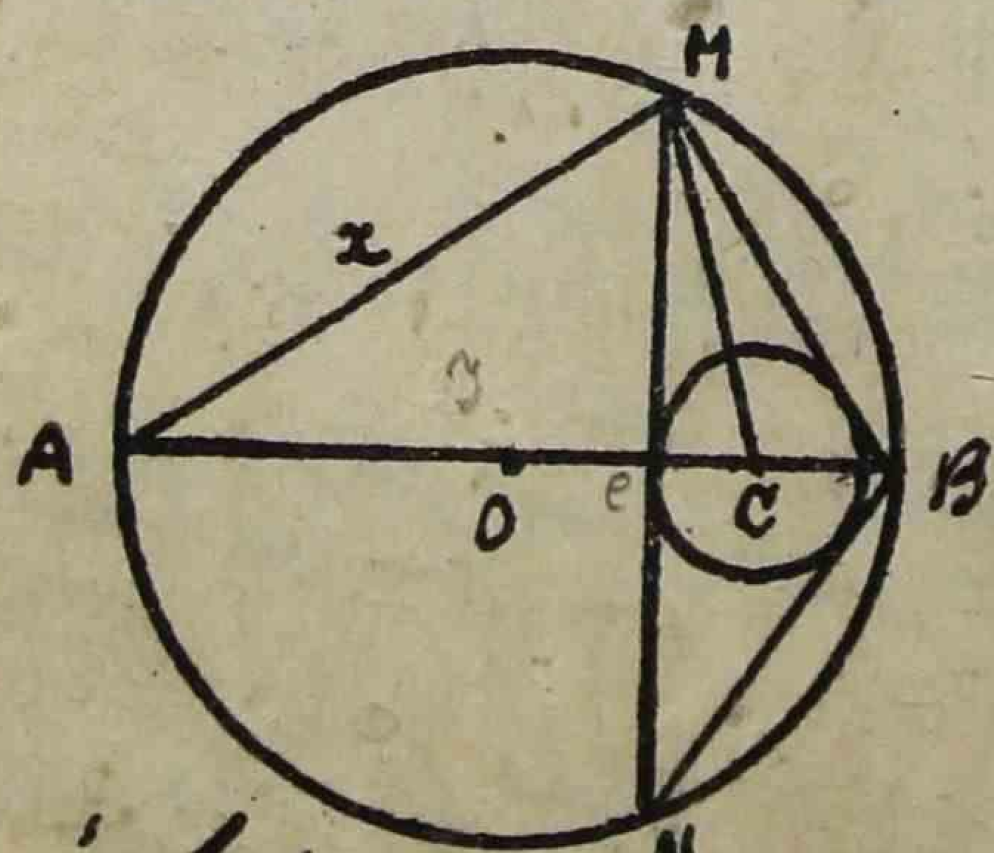
۱۷۴ - منحنی $y = x + 2\sin x$ را رسم نموده سطح حادث مابین آن و محور $x'x$ و عرض نقطه بطول π را حساب کنید

مسائلی که ذیلاً تنظیم و در دسترس محصلین گذارده میشود و بعضی از آنها را خود مؤلف طرح نموده است اغلب مسائلی است که در امتحانات مختلفه داده شده و برای مهیا نمودن محصلین و آماده ساختن آنها برای امتحانات نهائی و مسابقه‌ها فوق العاده مفید است و بعلاوه در ذیل همین فصل مسائلی را که در سنوات اخیر در امتحانات رسمی متوسطه مرکز و ولایات و همچنین در مسابقه‌ها داده شده است یادداشت مینماید

مسائل

۱۷۵ - تابع $y = \frac{x^2+2x+1}{2x^2-2x+m}$ مفروض است مطلوبست اولاً تقسیم مقادیر m بدو دسته برحسب شاخه‌های بینهایت منحنی ثانیاً مقادیر x را تعیین کنید که بازاء آنها تابع ماکزیموم یا مینیموم باشد ثالثاً منحنی تغییرات تابع را بازاء $m=0$ و $m=2$ رسم کنید رابعاً مقدار m را تعیین کنید بطریقی که کسر فوق قابل تحویل باشد و در این صورت منحنی آنرا نیز بازاء این مقدار m رسم کنید

۱۷۶ - دایره بقطر $AB = 2R$ و نقطه M در روی آن بفاصله $AM = x$ مفروض است وتر MN را بر AB عمود نموده MB و NB را وصل میکنیم مطلوبست اولاً محاسبه r شعاع دایره محاطیه مثلث MNB برحسب R و x ثانیاً محاسبه MC ثالثاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{MC^2}{R}$ هرگاه x تغییر کند





۱۷۷- معادلهٔ $t^4 - at^2 + b = 0$ که در آن a و b مختصات نقطه P واقعه در سطح دو محور میباشد مفروض است اولاً در عدهٔ ریشه های معادلهٔ فوق برحسب موضع نقطه P بحث نموده و تحقیق کنید که نقطه P در روی کدام خط Δ باید باشد برای آنکه معادلهٔ دارای دو ریشه مضاعف باشد ثانیاً ثابت کنید برای آنکه معادله دارای یک جواب معلوم t باشد باید نقطه P برروی خط D مماس بر منحنی Δ باشد ثالثاً معلوم کنید که نقطه P در روی کدام خط باید باشد برای آنکه چهار جواب معادلهٔ فوق تشکیل یک تصاعد عددی بدهند و در اینصورت ریشه ها را برحسب a حساب کنید

۱۷۸- معادلهٔ درجه دوم

$$(1-t)x^2 + (3t-5)x + 4(2-t) = 0$$

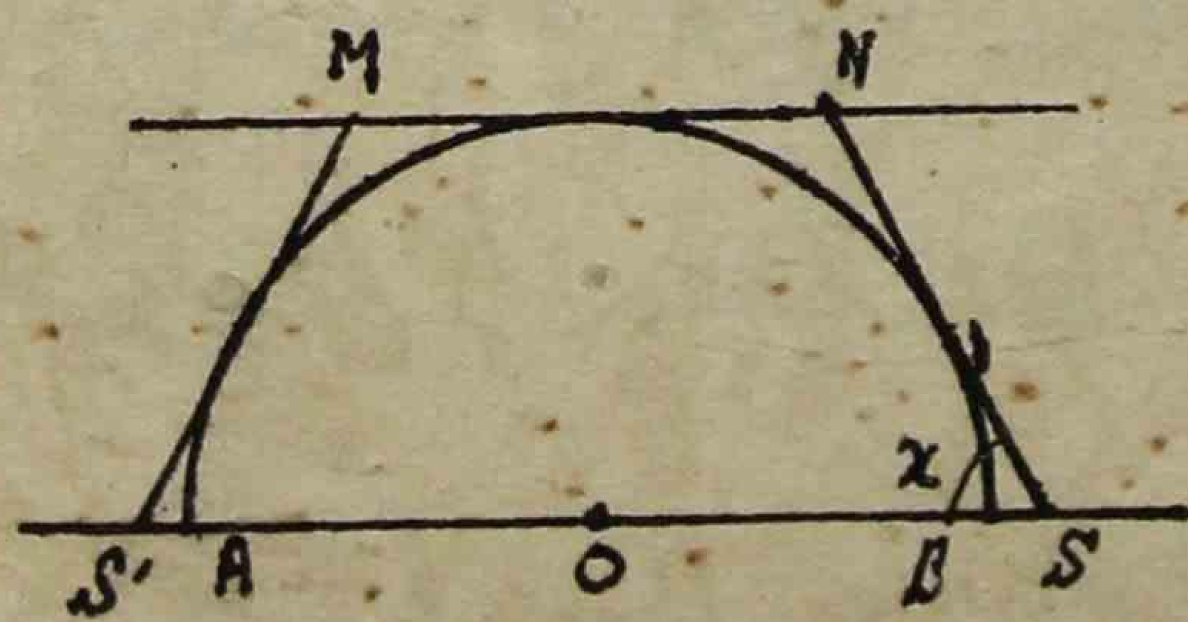
مفروض است اولاً در وجود و علامت ریشه های آن برحسب مقادیر t بحث کنید ثانیاً در حالتی که دو ریشه مثبت باشند آنها را اضلاع قائمه یک مثلث قائم الزاویه فرض میکنیم مطلوبست محاسبهٔ وتر این مثلث برحسب t و رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه t در حدود فوق تغییر کند ثالثاً مطلوبست محاسبهٔ شعاع دایره محاطیه مثلث فوق و تغییرات آن با شرائط فوق و همچنین محاسبهٔ شعاع برحسب وتر

۱۷۹- دایرهٔ c بشعاع ۱ و دایرهٔ c' بشعاع $\sqrt{32}$ که بعد المرکزین آنها $cc' = 7$ میباشد مفروض است مطلوبست اولاً موضع نقطه o موقع محور اصلی دو دایره ثانیاً خط المرکزین را امتداد میدهیم و در روی آن نقطه o را مبدأ قرار داده

وجهت از O به C را جهت مثبت اختیار میکنیم حال نقطه مانند M در روی آن بفاصله $OM = x$ فرض میکنیم مطلوبست عبارت نسبت قوت نقطه M نسبت بدو دایره C و C' ورسم جدول ومنحنی تغییرات آن هرگاه x جمیع مقادیر ممکنه را دارا گردد ثالثاً اوضاع نقطه M را تحقیق کنید که نظیر آنها نسبت فوق مساوی مقدار معلوم K باشد (بحث)

۱۸۰- دو محور قائم $x'ox$ و $y'oy$ ونقطه A در روی منصف الزاویه xoy بطول a ونقطه B در روی oy بعرض b مفروض است فرض میکنیم a و b مثبت ومخالف صفر باشند حال اگر نقطه متغیری مانند M در روی ox بطول مثبت x اختیار کنیم مطلوبست اولاً محاسبهٔ tg زاویه $\widehat{AMB}$ و $\widehat{BMO}$ برحسب x وتشکیل نسبت $y = \dfrac{tg\,\widehat{BMO}}{tg\,\widehat{AMB}}$ ثانیاً تغییرات y هرگاه M محور ox را طی نماید ثالثاً مقدار x را بطریقی تعیین کنید که MB منصف زاویه OMA باشد (بحث)

۱۸۱- نیمدایره بشعاع R ومماس MN موازی قطر AB مفروض است از نقطه O در روی قطر طولهای OS و OS' را مساوی یکدیگر جدا نموده از نقاط S و S' دو خط بر نیمدایره مماس میکنیم تا مماس اول را در نقاط M و N قطع نماید حال فرض میکنیم $\widehat{OSN} = x$ باشد مطلوبست



اولاً عبارت سطح حادث از دوران ذوزنقه درحول SS' ثانیاً تعیین x بطریقی



که این سطح مساوی $2a^2$ باشد (بحث) ثالثاً مطلوبست تغییرات این سطح هرگاه x از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند

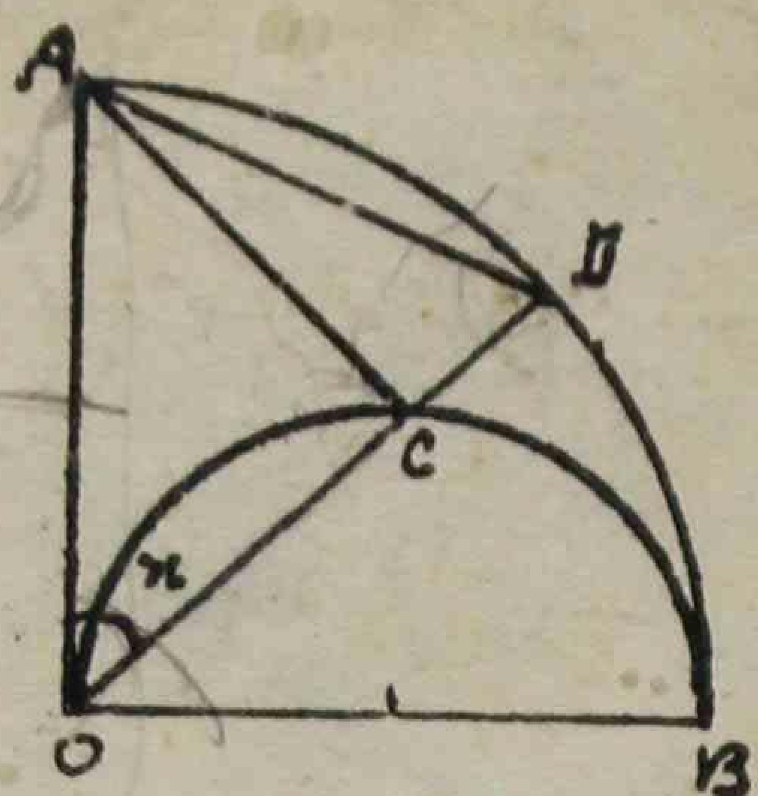
۱۸۲ـ معادلهٔ درجه دوّم

$$(1+\sin\varphi)x^2-(1+\sin^2\varphi)x+\sin\varphi(1-\sin\varphi)=0$$

که در آن φ نمایش پارامتریست مفروض است اولاً مطلوبست تحقیق رابطهٔ مابین x' و x'' ریشه های معادله فوق که بستگی بمقدار φ نداشته باشد ثانیاً مطلوبست محاسبهٔ $\sin\varphi$ که بازاء آن معادله دارای ریشه های مساوی باشد ثالثاً حاصل ضرب دو ریشه تابعی است از φ مطلوبست رسم جدول وسختی تغییرات آن هرگاه φ از ۰ تا 2π تغییر کند

۱۸۳ـ دو محور $x'Ox$ و $y'Oy$ عمود بر یکدیگر و نقطه A بمختصات ۰ و a و نقطه M بمختصات $\frac{a\cos\theta}{1+\cos\theta}$ و $\frac{a\sin\theta}{1+\cos\theta}$ که در آن a نمایش مقدار مثبت و θ زاویه مابین ۰ و π میباشد مفروض است اولاً مطلوبست محاسبهٔ m ضریب زاویه خط AM و تغییرات آن هرگاه θ از ۰ تا π تغییر کند ثانیاً مطلوبست محاسبهٔ θ بطریقی که $m=-1$ باشد ثالثاً مکان نقطه M را هرگاه θ تغییر کند معلوم نموده مطالب فوق را از روی آن تحقیق نمائید

۱۸۴ـ ربع دایرهٔ بشعاع R مفروض است OB را قطر قرار داده در داخل آن نیمدایره رسم میکنیم و شعاع OD را نیز رسم نموده و فرض میکنیم زاویه $\widehat{AOB}=x$

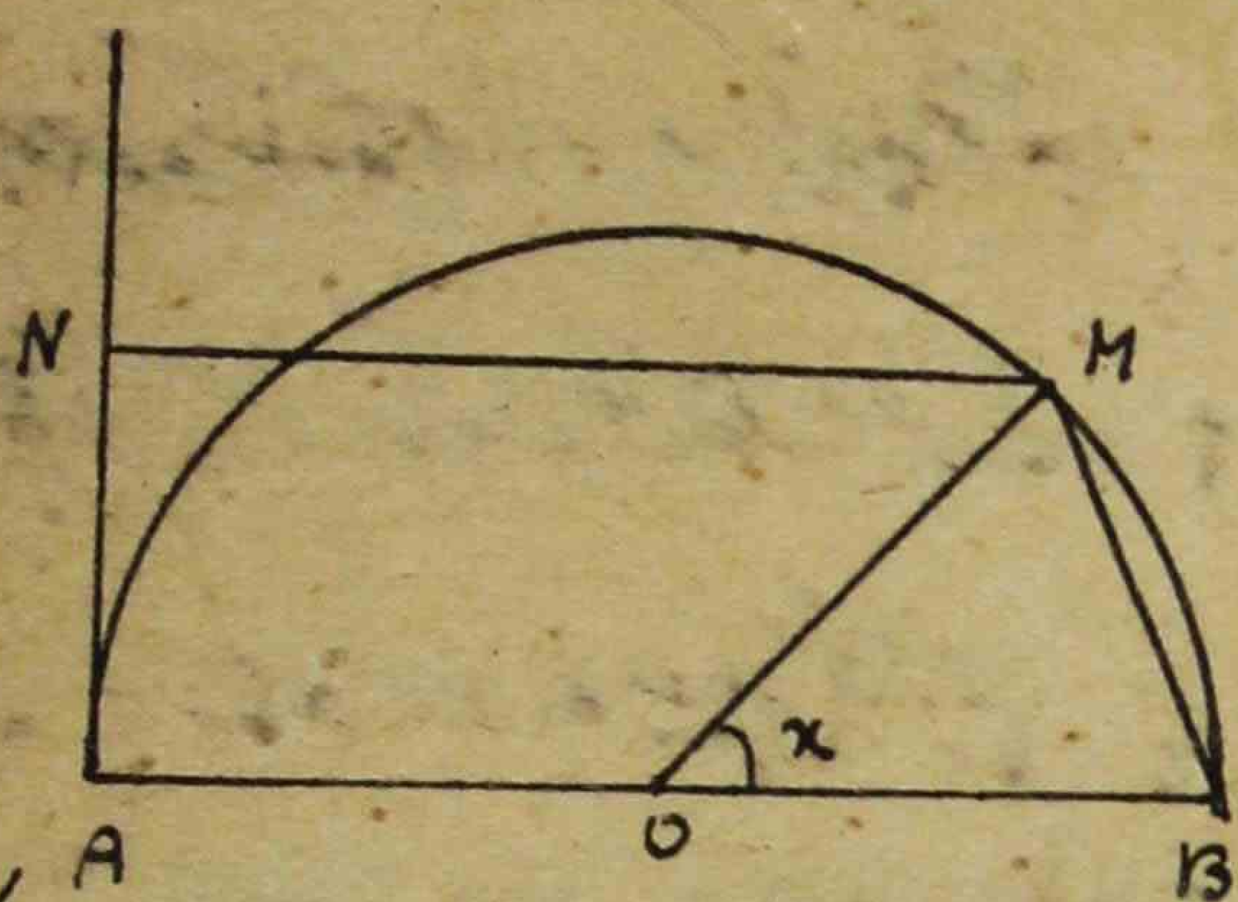


باشد هرگاه شعاع مزبور نیمدایره را در نقطه
C قطع کند مطلوبست اوّلا محاسبهٔ سطح
مثلث ACD برحسب R و x و رسم
جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x
تغییر کند ثانیاً مطلوبست محاسبهٔ سطح حادث مابین منحنی فوق و محور x'x ثالثاً در حالتی
که $OC = m . AD$ فرض شود مطلوبست محاسبهٔ x و بحث در مسئله و همچنین تعیین مقدار
عددی x در حالت خاصی که $m = \sqrt{2}$ باشد رابعاً هرگاه $AC = AD$ فرض شود
مطلوبست محاسبهٔ x و اثبات آنکه دایرهٔ محیطیه مثلث AOC در نقطه A بر AD
مماس میگردد

۱۸۵– تابع $y = \frac{a^3}{x^2 + mx + a^2}$ که در آن a مقدار مثبت معلوم و m
نمایش پارامتریست مفروض است اوّلا در اشکال منحنی فوق برحسب مقادیر m بحث
نمائید ثانیاً نقطه A را در روی ox بطول $OA = a$ و نقطه M را در روی منحنی
بطول x اختیار میکنیم و فرض میکنیم P تصویر آن بر oy باشد مطلوبست محاسبهٔ
حجم حادث از دوران ذوزنقه OAMP در حول oy برحسب x و تغییر مقادیر
منفی x ثالثاً مطلوبست تغییرات این حجم هرگاه M منحنی را طی نماید در حالتی که $m = -a$
و $m = 2a$ فرض شود

۱۸۶– نیمدایره بقطر $AB = 2R$ و مماس بر نقطه A مفروض است نقطه
مانند M در روی نیمدایرهٔ فوق اختیار نموده و فرض میکنیم $MOB = x$





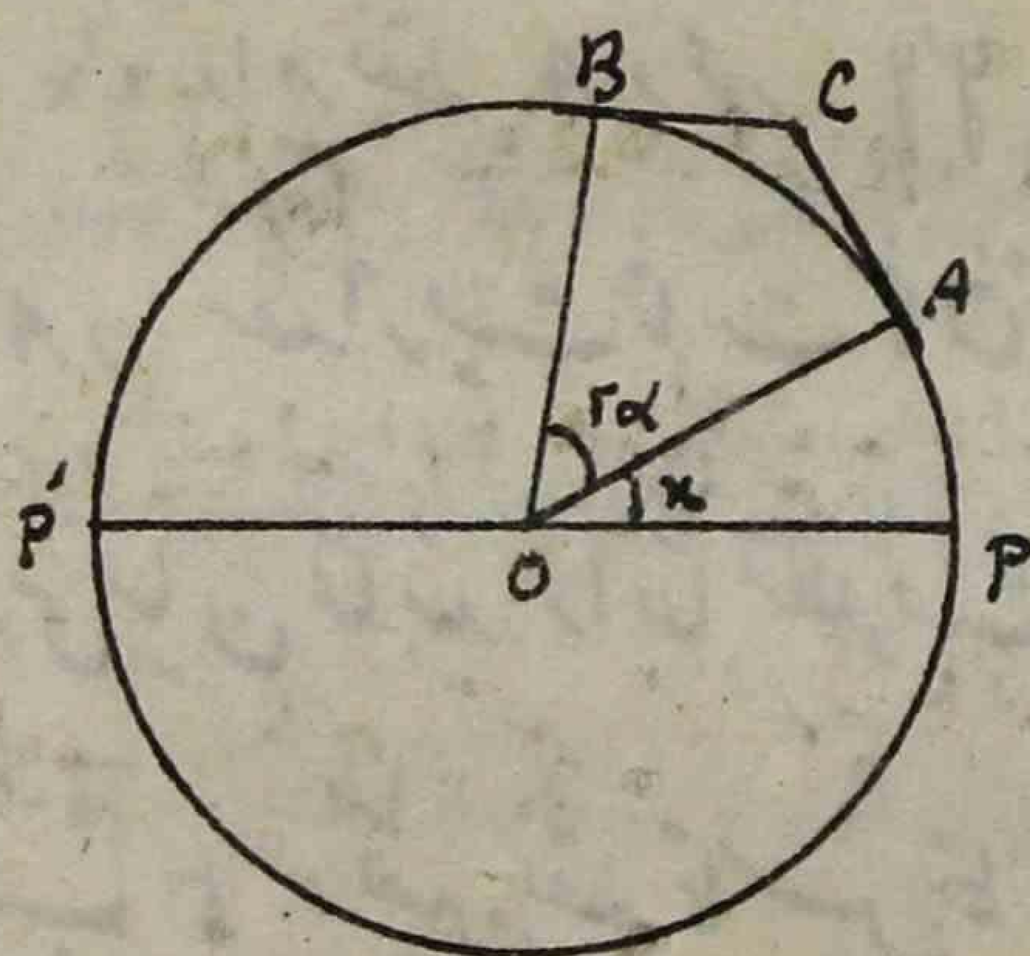
باشد MB را وصل نموده وعمود MN را بر مماس اخراج میکنیم مطلوبست اولاً محاسبهٔ $y = MB + MN$ برحسب R و x ورسم جدول ومنحنی تغییرات آن هرگاه x از ۰ تا π تغییر کند ثانیاً مطلوبست محاسبهٔ سطح حادث مابین منحنی ومحور $y'y$ ومحور $x'x$ وارونه بطول π ثالثاً مطلوبست محاسبهٔ x بطریقی که MB + MN مساوی مقدار معلوم m باشد (بحث) رابعاً بحث اخیر را با منحنی وجدول تغییرات y تطبیق نمائید (سابقه ششم ۱۹۶)

۱۸۷ - توابع $y = (1-\beta)x^2 + \frac{3\alpha}{2}$ و $y = \alpha x^2 + \beta - 1$ مفروض است اولاً تعیین کنید چه رابطه مابین α و β باید موجود باشد تا آنکه منحنی نمایش تغییرات دو تابع یکدیگر را بزاویه قائمه قطع کنند وبفرض آنکه $\alpha = 1$ باشد β را حساب کنید ثانیاً منحنی تغییرات دو تابع را بازاء $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ رسم کنید ثالثاً سطح محصور مابین دو منحنی فوق را حساب کنید رابعاً در سطح دو محور نقطه تعیین کنید که اگر از آن نقطه بنقاط تقاطع دو منحنی فوق وصل کنیم خطوط واصل بترتیب با جهت مثبت محور x زوایای ۶۰ و ۳۰ احداث نماید خامساً اگر محور x ها بر محل تقاطع دو منحنی بگذرد وعمود بر محور y ها باشد معادلات جدید دو منحنی را بنویسید سادساً جدول ومنحنی تغییرات $z = \frac{y}{y}$ را رسم نموده ونقطهٔ از منحنی را معلوم کنید که مماس بر آن با خط $y - 20x = 0$ موازی

باشد و بعلاوه معادله مماس را تعیین کنید

۱۸۸- تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مفروض است مطلوبست اولاً تعیین ضرائب a و b و c و d بطریقی که تابع y در نقاط M بمختصات ۱ و ۴ و M' بمختصات ۳ و ۰ بترتیب ماکزیموم و مینیموم باشد ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع را بازاء این مقادیر a و b و c و d رسم کنید ثالثاً در ریشه های معادله $x^3 - 6x^2 + 9x - m = 0$ از روی منحنی فوق بحث نمائید رابعاً سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ و عرضهای نقاط بطول ۰ و ۳ را حساب کنید

۱۸۹- دایره بشعاع R و دو شعاع OA و OB که با یکدیگر زاویه 2α تشکیل میدهند مفروض است مماسهای مرسوم از A و B در نقطه C یکدیگر را قطع میکنند شکل را در حول قطر PP' که در خارج زاویه AOB اختیار میشود دوران میدهیم مطلوبست



اولاً محاسبهٔ V حجم حادث از دوران چهارضلعی $OACB$ برحسب R و α و زاویه حاده $\widehat{AOP} = x$ ثانیاً حجم V_1 حادث از دوران قطاع دایره OAB را حساب کنید و تحقیق کنید که نسبت $\frac{V}{V_1}$ ثابت و بستگی به x ندارد ثالثاً α را حساب کنید بطریقی که نسبت فوق مساوی m باشد (بحث)

۱۹۰- سهمی بر أس S و کانون F را اختیار نموده و فرض میکنیم $SF = \frac{p}{2}$



باشد نقطه مانند M در روی سهمی فوق فرض میکنیم مطلوبست اولاً تغییرات $\frac{MS'}{MF'}$ و محاسبهٔ ماکزیموم آن ثانیاً رسم منحنی این تغییرات ثالثاً از روی منحنی فوق معلوم کنید چند نقطه M در روی سهمی یافت میشود که نظیر آنها نسبت فوق مساوی مقدار معلوم K باشد

۱۹۱ - خط D بمعادلهٔ $y = \frac{2}{t}\left(1-\frac{x}{t}\right)$ که در آن t نمایش پارامتریست مفروض است اولاً ثابت کنید که این خط همواره با منحنی ثابتی که معادلهٔ آن بصورت $y = \frac{a}{bx}$ میباشد مماس خواهد بود مقادیر عددی a و b را حساب نموده و مختصات M نقطه تماس را برحسب t تعیین نمائید ثانیاً فرض میکنیم خط D محور $x'x$ را در نقطه A و محور $y'y$ را در نقطه B قطع کند ثابت کنید که سطح مثلث OAB مقداریست ثابت ثالثاً نسبت $\frac{AB}{AT}$ را حساب نموده و نتیجه را بوجه هندسی بیان نمائید رابعاً مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $z = AB$ برحسب t و تعیین نقطه تماس خط D با منحنی C نظیر مینیموم این تابع

۱۹۲ - اولاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{-x^3}{3} + 3x$ را رسم کنید و نقاط فصل مشترک منحنی را با محور $x'x$ تعیین نموده مماسهای مرسومه از این نقاط را نیز معلوم نمائید ثانیاً منحنی را با خط مار بر نقطه A بمختصات ۰ و ۳ و بمعادلهٔ $y = m(x+3)$ قطع میکنیم در عدهٔ نقاط تقاطع این خط با منحنی غیر از نقطه A بحث کنید و معادلهٔ مکان نقطه M وسط BC را تعیین نموده آنرا رسم کنید رابعاً سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$

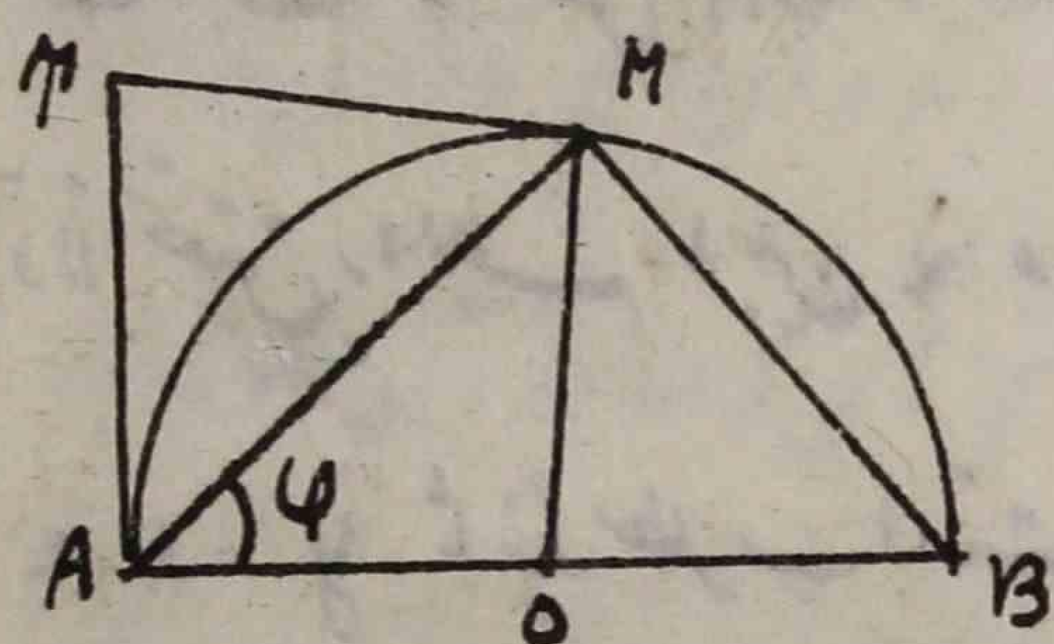
و عرضهای نقاط بطول ۰ و ۳ را حساب کنید

+ ۱۹۳ - در روی دایرهٔ بمرکز C و بشعاع واحد دو نقطه O و O' را که قوس ما بین آنها $\frac{\pi}{2}$ میباشد فرض میکنیم از نقطه مانند M در روی نیمدایره OO'A عمود MP را بر OC و MN را بر CO' اخراج نموده جهت از O به O' را جهت مثبت و قوس $\overset{\frown}{OM}$ را x و قوس $\overset{\frown}{ON}$ را y فرض میکنیم مطلوبست اولاً تحقیق رابطهٔ ما بین x و y و محاسبهٔ محیط مثلث MNP بوسیلهٔ x و y ثانیاً مطلوب است تعیین M بطریقی که مجموع طولهای MP و MN مساوی m باشد (بحث) همچنین تغییرات مجموع فوق را هرگاه M نیمدایره OO'A را طی نماید معلوم کنید (محاسبهٔ عددی x هرگاه $m = 1,8$) باشد ثالثاً تحقیق کنید که منصف زوایای داخلی و خارجی زوایای N و P در مثلث MNP بر نقطهٔ ثابتی مرور مینمایند و همچنین مکان هندسی مراکز دوایر محاطیه داخل و خارج را در زاویهٔ M معلوم کنید.

+ ۱۹۴ - مثلث ABC که در آن زاویه A قائمه و زاویهٔ B و وتر $BC = a$ معلوم است مفروض است فرض میکنیم D قرینه A نسبت بوتر BC و نقطه I وسط AC باشد مطلوبست محاسبهٔ $\tan$ زوایای $\widehat{AID}$ و $\widehat{ADI}$ و محاسبهٔ این زوایا هرگاه

$B=60°$ باشد ثانیاً هرگاه BC ثابت وزاویه A قائمه وزاویه B تغییر کند مطلوبست تغییرات UI هرگاه $x=\sin B$ باشد وهمچنین رسم مثلث ABC نظیر ماکزیموم UI

- ۱۹۵ - نیمدایره بقطر $AB=2R$ مفروض است ازنقطه A وتر AM را رسم نموده وفرض میکنیم زاویهٔ $BAK=\varphi$ باشد ازنقاط A و M دو مماس رسم میکنیم تا یکدیگر را درنقطه T قطع کنند



وبعد دورهٔ حادثه مابین مماس AT و TM وقوس MB را در حول قطر AB دوران میدهیم مطلوبست اوّلاً محاسبهٔ سطح حادث برحسب R و φ ثانیاً رسم جدول ومنحنی تغییرات این سطح هرگاه φ تغییر کند (متغیّر را $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=t$ اختیار کنید) ثالثاً تغییرات حجم محدود بسطح فوق را معلوم کنید

- ۱۹۶ - دو تابع

$$y=x(x-3)(x+2)$$

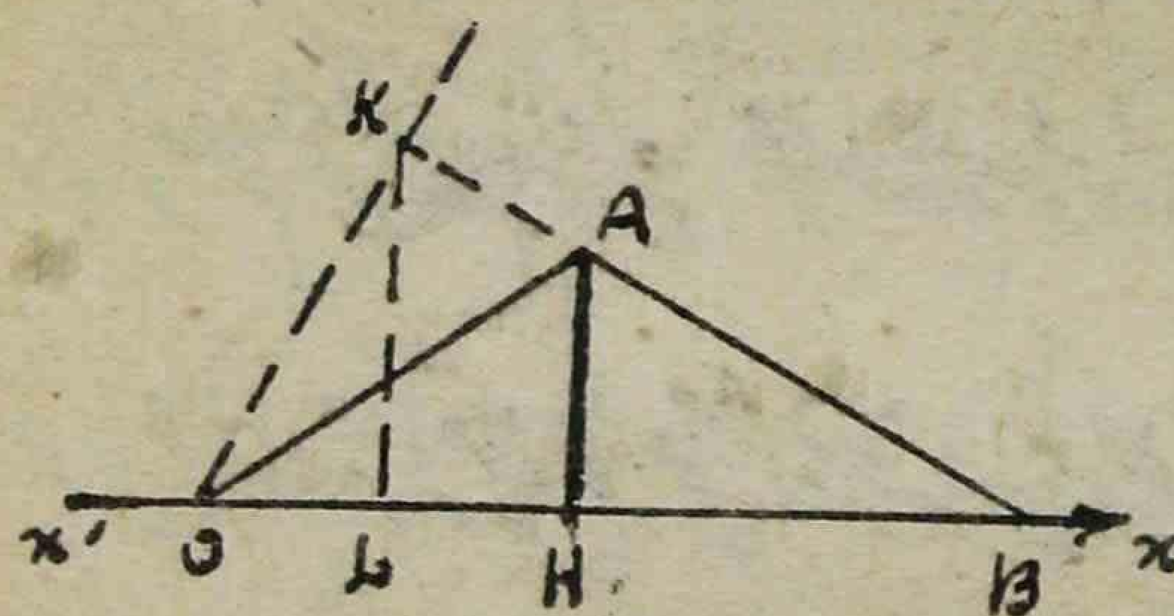
و

$$z=2x(x-3)$$

مفروض است اوّلاً ثابت کنید که هرگاه c و c' دو منحنی نمایش تغییرات آنها را نسبت بیکدستگاه مختصات رسم کنیم دو منحنی دریک نقطه ثابت T بریکدیگر مماس ودریک نقطه ثابت A یکدیگر را قطع میکنند ثانیاً ثابت کنید که مقدار سطح محصور مابین

دو منحنی در فاصله AT مقداریست ثابت ثالثاً فرض میکنیم m' و m'' ضریب زاویه
مماس بر دو منحنی در نقطه A باشد ثابت کنید که $m'-m''$ مساوی مقدار ثابتی
میباشد و m را حساب کنید بطریقی که هرگاه V زاویه دو منحنی در نقطه A باشد $tg V=9$
باشد رابعاً تحقیق کنید که منحنی C نمایش تغییرات y محور x ها را در سه نقطه متوالی
A و O و B تقاطع مینماید و مطلوبست مقدار λ بطریقیکه مقدار جبری سطح حادث
مابین منحنی و محور x ها و عرض نقاط A و B مساوی صفر باشد خامساً جدول و منحنی
تغییرات تابع y و z را بازاء $x=\pm 3$ رسم نمائید

+ ۱۹۷- محور $x'ox$ و مثلث OAH که در زاویه H قائمه و ضلع آن OH
متکی بر ox میباشد مفروض است

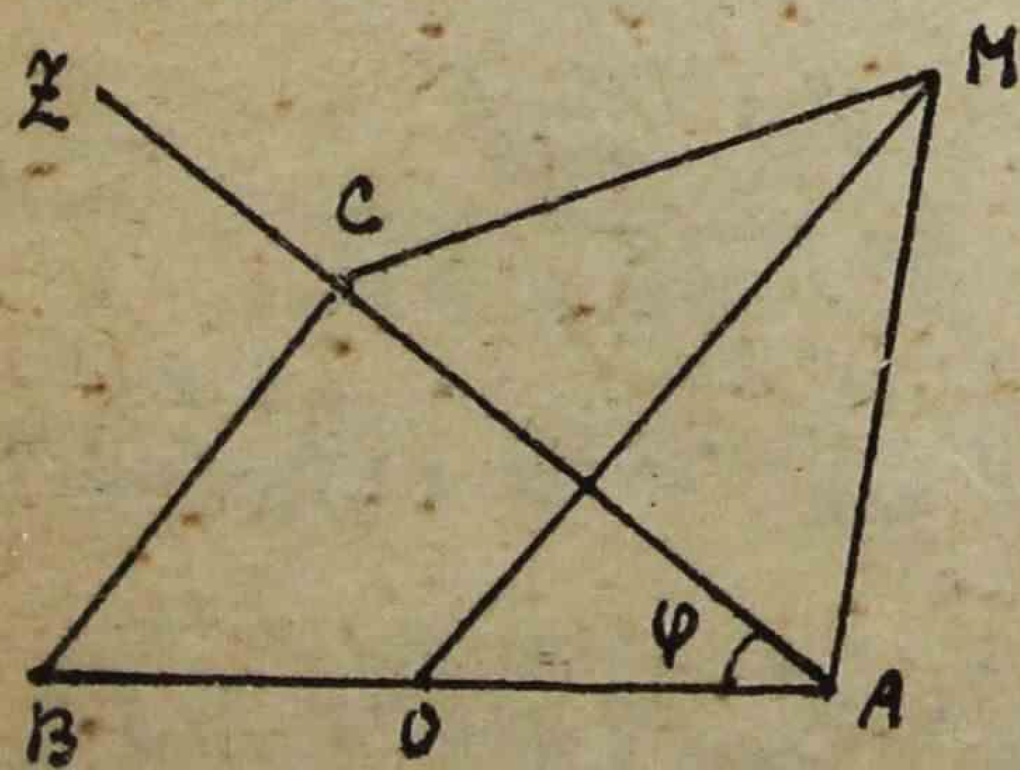


هرگاه $OA=a$ و $OH=h$
و نقطه B نقطه متغیری در روی ox بفاصله
$OB=x$ باشد مطلوبست اولاً محاسبه
عبارت $y=\frac{\overline{AB}^2}{OB\times HB}$ برحسب a و h و x ثانیاً رسم جدول و منحنی
تغییرات آن هرگاه B خط $x'x$ را طی کند (برای تغییرات فوق $h=1$ و $a=\sqrt{5}$
فرض میشود) ثالثاً هرگاه K موقع عمود وارد از O بر AB و L موقع
عمود وارد از K بر ox باشد تحقیق کنید که $y=\frac{HA}{LK}$ خواهد بود و بتوسط این
وسیله موضع نقطه B را در حالت ماکزیموم و مینیموم y رسم کنید و نتایج ثانیاً را بطور

هندسی تحقیق نمائید

۱۹۸ - تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ مفروض است اولاً مطلوبست محاسبهٔ مقادیر a و b بطریقیکه هرگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y همواره محصور مابین ۰ و ۵ باشد ثانیاً هرگاه $a=4$ و $b=4$ فرض شود جدول و منحنی تغییرات تابع را رسم کنید ثالثاً نقطه A را در روی محور $y'y$ بعرض واحد اختیار نموده و فرض میکنیم نقطهٔ مانند B در روی دایره بمرکز A و بشعاع واحد از مبدأ O با سرعت زاویه ثابت $\omega=1$ حرکت نماید هرگاه AB محور $x'x$ را در نقطهٔ مانند H قطع کند و فرض کنیم K نقطه از منحنی بطول OH و Q تصویر K بر $y'y$ باشد ثابت کنید که نقطه Q در روی $y'y$ دارای حرکت نوسانی خواهد بود که معادله آنرا تعیین مینمائید رابعاً دیاگرام حرکت فوق را رسم نموده و سطح حادث مابین منحنی و محور $y'y$ و $x'x$ و عرض نقطه ماکزیموم منحنی را حساب کنید

۱۹۹ - دو نقطه ثابت A و B بفاصلهٔ $AB=2a$ و نقطه O وسط آن مفروض است از نقطه A نیم خط AZ را رسم میکنیم و فرض میکنیم زاویه حاده $Z\hat{A}B=\varphi$ باشد نقطه B را بر روی AZ تصویر نموده و در روی AC و در خارج مثلث ABC مثلث متساوی الاضلاع ACM را بنا میکنیم مطلوبست اولاً محاسبهٔ $y=OM$ برحسب a و φ و رسم جدول



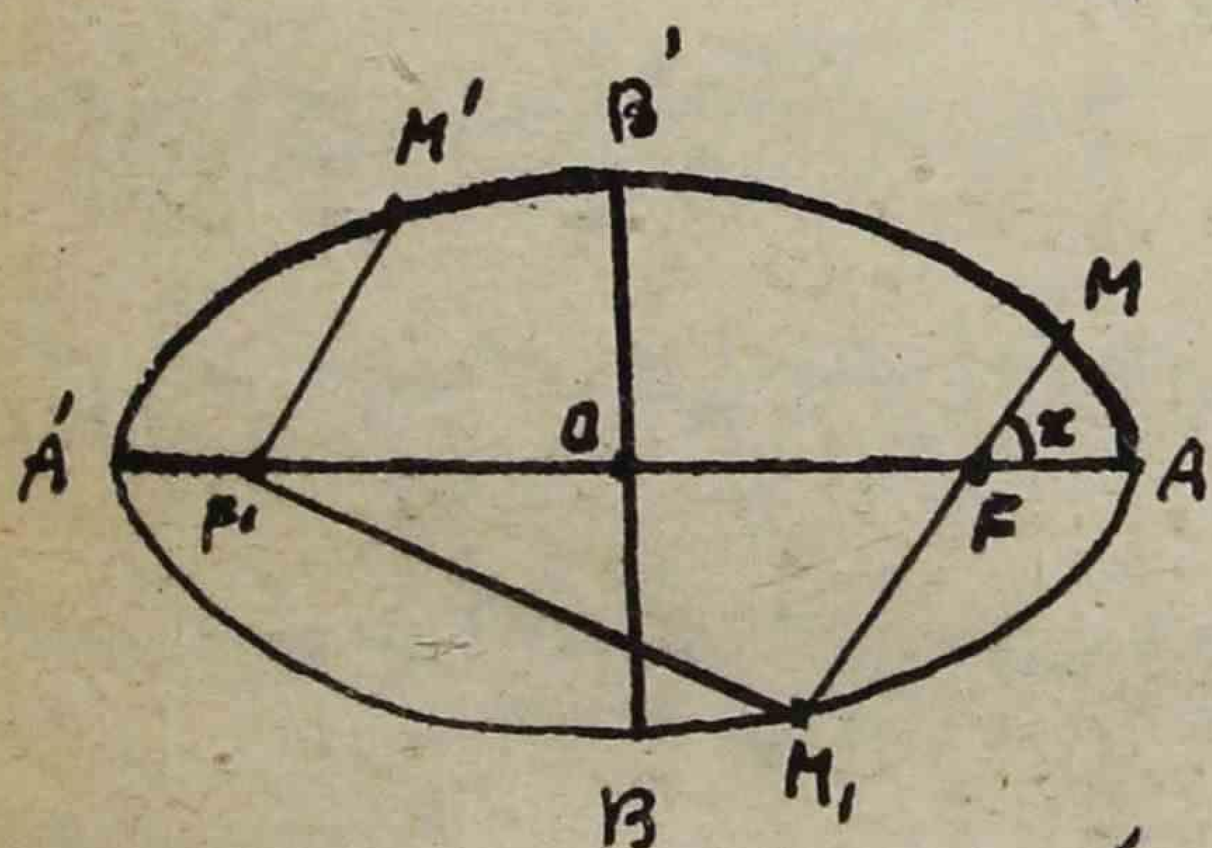
منحنی تغییرات آن هرگاه φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند ثانیاً φ را بطریقی تعیین کنید که OM مساوی ρ باشد (بحث) ثالثاً بحث اخیر را از روی منحنی تغییرات تابع نتیجه بگیرید

۲۰۰ - عبارت $\Delta = (a^2 + \frac{\lambda}{2} - x^2)^2 + [a(1-\lambda) - x]^2$ که در آن x و λ متغیره و a مقداریست معلوم مفروض است هرگاه λ ثابت فرض شود مطلوبست تغییرات Δ و رسم منحنی آن ثانیاً بازاء بعضی مقادیر λ Δ دارای یک ماکزیموم و دو مینیموم میباشد مطلوبست تنظیم این مقادیر Δ و تعیین حالتیکه دو مقدار از اینها مساوی باشند

۲۰۱ - تابع $y = \frac{ax+1}{x^2-1}$ که بازاء هر مقدار a دارای یک منحنی نظیر است مفروض است اولاً ثابت کنید که منحنیات مزبوره همگی بر نقطهٔ ثابتی مرور مینمایند همچنین منحنی تغییرات تابع را بازاء مقداری از a رسم کنید که مماس بر منحنی در نقطهٔ ثابت فوق با خط $4x + 5y = 0$ موازی باشد ثانیاً خط D موازی $x'x$ منحنی اخیر را در دو نقطه مانند M' و M'' و محور $y'y$ را در نقطهٔ P قطع مینماید هرگاه فرض کنیم که نقطهٔ m مزدوج توافقی P نسبت بدو نقطهٔ M' و M'' باشد مطلوبست رابطهٔ مابین مختصات m و مکان هندسی آن هرگاه D بموازات خود تغییر کند ثالثاً هرگاه C_0 یکی از منحنیات تابع مفروض و نقطهٔ M_1 و M_2 نقاط ماکزیموم و مینیموم باشد ثابت کنید که مختصات x_1 و y_1 و x_2 و y_2

نقاط M_1 و M_2 در روابط ذیل صدق مینمایند $x_1x_2=1$ $y_1+y_2=-1+y$ واز براه بفرض آنکه یکی از نقاط M_1 و M_2 در دست باشد طریقهٔ هندسی برای رسم نقطه دیگر بدست آورید رابعاً هرگاه فرض کنیم نقطه M_1 نقطه از منحنی مختصات x_1 و y_1 باشد از روابط فوق نقطه دیگری مانند M_2 نظیر آن بدست آورده وفرض کنید که نقطه M_1 خط $y_1=x_1$ را طی نماید دراینصورت رابطه مابین x_2 و y_2 بدست آورده مکان نقطه M_2 را تعیین نمائید

۲۰۲ - بیضی بقطر اطول $2a$ وقطر اقصر $2b$ وفاصلهٔ کانونی $2c$ معروض است از نقطه F وتر MM_1 را بطریقی رسم میکنیم که با FF' زاویهٔ x تشکیل دهد واز کانون F' شعاع حامل $F'M'$ را موازی با آن رسم میکنیم مطلوبست

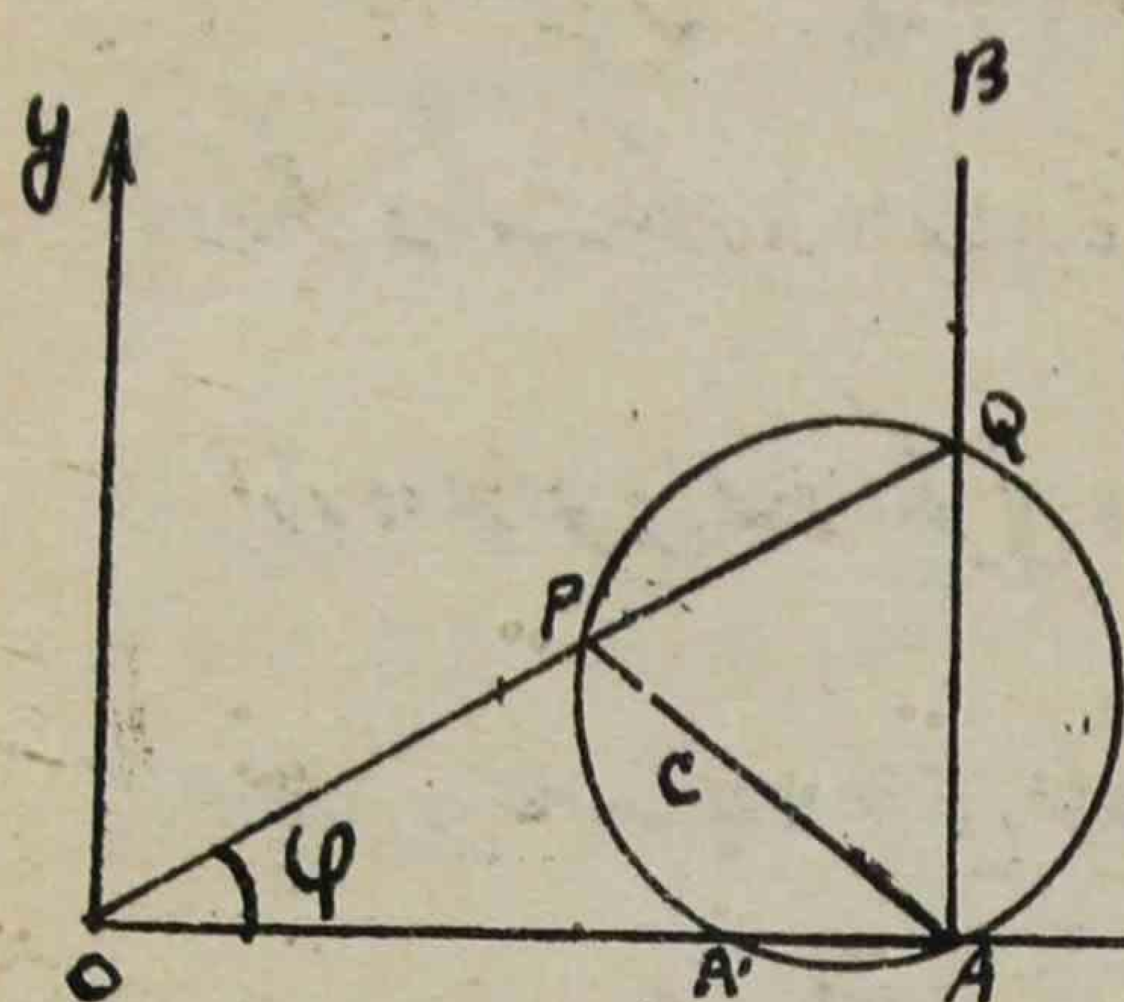


اولاً محاسبهٔ S سطح مثلث $F'MM_1$ برحسب a و b و c و x ثانیاً هرگاه فرض کنیم $a^2=2b^2$ باشد مطلوبست رسم جدول ومنحنی تغییرات $y=\frac{S}{b^2 \cos x}$ هرگاه x از 0 تا π تغییر کند

ثالثاً هرگاه P نقطه تقاطع مماسهای مرسومه از M و M' باشد تحقیق کنید که خط OP موازی M_1M خواهد بود همچنین مطلوبست مکان نقطه P هرگاه x تغییر کند

۲۰۳ — زاویهٔ قائمه xOy ونقطه A درروی Ox معروض است بطریقی که $OA=a$ میباشد عمود AB را بر Ox اخراج نموده خط

AC منصف الزاویه OAB را رسم میکنیم خط غیر مشخص مار بر O که با Ox



زاویه φ را تشکیل میدهد AC را

در نقطه P و AB را در نقطه Q

قطع میکند مطلوبست اولاً محاسبهٔ قطعات

OP و OQ برحسب a و x ثانیاً تغییرات

$OP \times OQ$ هرگاه φ از 0 تا π تغییر کند ثالثاً دایرهٔ محیطیه مثلث APQ Ox,

را در نقطه دیگر A' قطع میکند مطلوبست مینیموم OA'

۲۰۴ - دو دایره C و C' بمراکز O و O' و باشعه a و a' $(a' < a)$

در نقطه M مماس خارج میباشند فرض میکنیم A و A' و B و B' نقاط تقاطع هریک

از دو دایره با مماس خارجشان بوده و P محل تقاطع مماس مشترک داخل و مماس

مشترک خارج AA' باشد زاویهٔ AOM را مساوی 2α فرض میکنیم مطلوبست

اولاً محاسبهٔ a' شعاع دایرهٔ C' برحسب a و α ثانیاً طول قطعه PM هرگاه

P محل تقاطع خط MB با مماس مشترک خارج AA' باشد و ثابت کنید که اگر $a = 1$

$\lambda \alpha = x$ باشد $MP = \frac{2x}{3 - 4x^2}$ خواهد بود ثالثاً مطلوبست رسم

جدول و منحنی تغییرات تابع جبری $y = \frac{2x}{3 - 4x^2}$ هرگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$

تغییر کند

۲۰۵ - مربع $OABC$ بضلع واحد و نقطه M در روی OA و مابین O و

A مفروض است عمود مرسومه از B بر BM امتداد OA و OC را در نقاط

P و Q قطع میکند فرض میکنیم $OM=x$ و $OP=y$ و $OQ=z$ باشد

اولاً ثابت کنید که $x+y=2+xy$ و $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ میباشد

وازینرو مطلوبست محاسبهٔ y و z و MP برحسب x ثانیاً تغییرات y را

برحسب x معلوم کنید هرگاه M طول OA را طی نماید ثالثاً M را تعیین کنید بطریقی که

حجم حادث از دوران مثلث APB درحول MP مساوی $\frac{\pi a^3}{...}$ باشد (بحث)

۲۰۶ — مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین ABC که در آن $AB=AC=b$

میباشد مفروض است ضلع AC را بقدر $CD=b$ امتداد داده و در روی وتر

BC نقطه متغیری مانند M فرض میکنیم و بعد MP را بر AB عمود کرده و فرض

میکنیم $AP=x$ باشد اولاً مطلوبست محاسبهٔ $\tan$ زاویه $\widehat{MDP}$

برحسب b و x و رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x از ۰ تا b تغییر کند

ثانیاً محاسبهٔ مقدار x بطریقی که زاویه فوق ماکزیموم باشد و همچنین مطلوبست $\tan$

زاویه ماکزیموم

۲۰۷ — اولاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y=x+\frac{4}{x^2}$ را رسم کنید

ثانیاً تحقیق کنید که تابعی بصورت $F(x)=ax^2+bx+\frac{c}{x}$ یافت میشود

بطریقی که مشتق آن تابع مفروض باشد ثالثاً هرگاه نقطه A نقطه از منحنی بطول ۲ باشد

مطلوبست سطح حادث مابین منحنی و مجانب آن و عرض نقاط بطول ۲ و ... و تحقیق

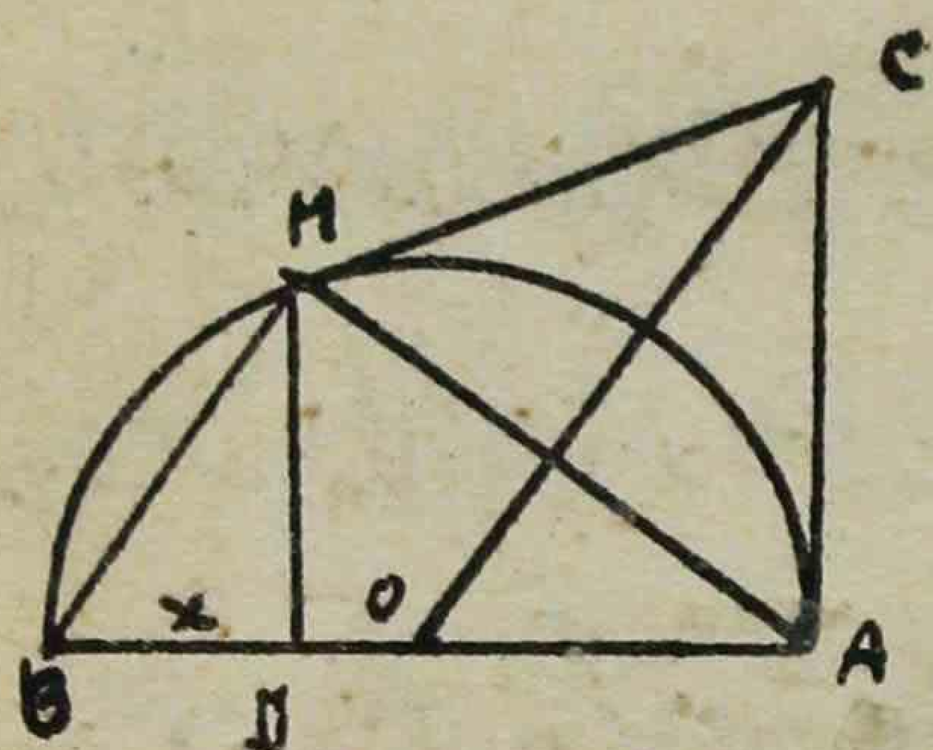
آنکه آیا این سطح هرگاه x میل کند بسمت ∞ دارای حدی میباشد یا خیر را بعداً

مماس بر منحنی در نقطه مینیموم منحنی را در نقطه دیگر B قطع میکند مطلوبست مشخصات آن و ضریب

زاویه مماس بر منحنی در نقطه B

۲۰۸ - نیمدایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است از نقطه M خط MD را بر قطر

AB عمود نموده و فرض میکنیم $BD = x$



باشد بعد از نقاط A و M دو خط بر آن

مماس میکنیم تا در نقطه C یکدیگر را ملاقات نمایند

مطلوبست اولاً محاسبه AM و AC و OC بر حسب R و x ثانیاً رسم

جدول و منحنی تغییرات $y = AC^2 - 4AM^2$ هرگاه نقطه M محیط نیمدایره را

طی نماید

۲۰۹ - دو محور $x'x$ و $y'y$ که با یکدیگر زاویه θ تشکیل میدهند و نقاط ثابت

A و B در روی $y'y$ بفاصلهٔ $OA = a$ و $OB = b$ و نقطه متغیر

M در روی $x'x$ بفاصلهٔ $OM = x$ مفروض است هرگاه $a > b$ باشد

اولاً جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{MA^2}{MB^2}$ را هرگاه x تغییر کند رسم کنید

ثانیاً در صورتیکه P و Q وضعیت نقطه M در حالت ماکزیموم و مینیموم y باشد

تحقیق کنید که دایرهٔ بقطر PQ بر نقاط A و B مرور مینماید ثالثاً هرگاه نقطه M'

وضعیت M غیر از وضعیت P و Q باشد معلوم کنید که یک نقطه دیگر M' یافت میشود

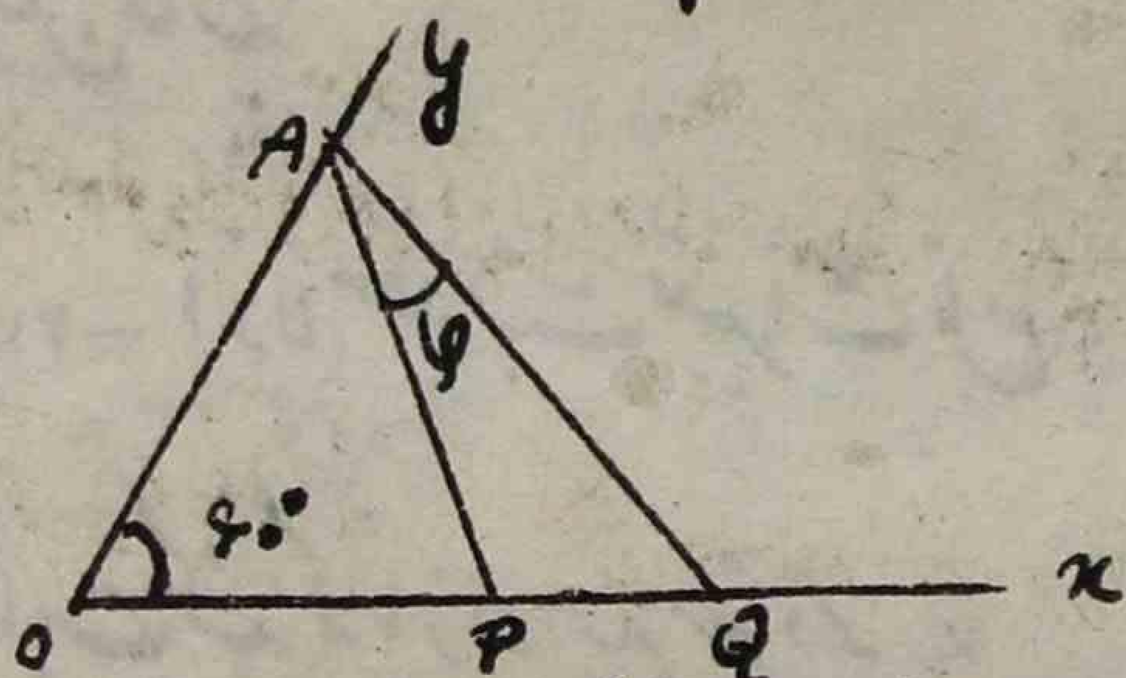
که برای آن y مساوی همان مقدار باشد در اینصورت مطلوبست رابطهٔ مابین قطعات $x' = OM'$ و $x'' = OM''$ را رابعاً درصورتیکه نقطه M' معلوم باشد نقطه M'' را باترسیم مشخص نمائید

۲۱۰– دو نقطه ثابت O و A بفاصلهٔ $OA = a$ و نقطهٔ متغیر M بفاصلهٔ $OM = x$ درروی نیم خطی که با OA زاویه 60° تشکیل میدهد مفروض است مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{MA^2}{OM}$ هرگاه x از ۰ تا $+\infty$ تغییر کند ثانیاً مقدار x را حساب کنید بطریقی که نسبت فوق مساوی مقدار معلوم l گردد (بحث) ثالثاً بازاء مقدار مناسب l برای M دو وضعیت M' و M'' بدست میآید ثابت کنید که دایرهٔ $AM'M''$ در نقطه A بر OA مماس و شعاع آن برابر است با $\frac{l}{\sqrt{3}}$

۲۱۱– معادلهٔ $\cos x + a \sin x = b$ که در آن x نمایش قوس مجهول و a و b نمایش مختصات نقطه M واقعه درسطح دو محور قائم میباشد مفروض است اولاً مطلوبست بحث درجوابهای معادله فوق برحسب موضع نقطه M درسطح دو محور و مقایسهٔ منتهای قوسهای جواب معادله فوق هرگاه درروی دایرهٔ مثلثاتی بیک مبدأ اختیار شوند ثانیاً جدول و منحنی تغییرات $y = \cos x + 5 \sin x$ را هرگاه x از ۰ تا 2π تغییر کند رسم کنید ثالثاً سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ قسمتی را که در زیر محور واقع میشود رسم نمائید

۲۱۲ - تابع $y = \frac{x}{2x^2 - 5x + 2}$ مفروض است مطلوب است اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات آن ثانیاً خط D موازی محور $x'x$ عموماً منحنی را در دو نقطه M و M' قطع میکند هرگاه P و P' تصاویر آنها بر محور $x'x$ باشد مطلوب است محاسبهٔ h مختصات مرکز مربع مستطیل MM'PP' برحسب h عرض خط D ثالثاً ثابت کنید که دایرهٔ محیطیهٔ این مربع مستطیل بازاء جمیع مقادیر h نسبت به دایره ثابتی که معادله آن را تعیین میکنید قائم میباشد

۲۱۳ - زاویه xoy مساوی ۶۰ و نقطه A در روی oy بفاصلهٔ OA = a > 0 و دو نقطهٔ متغیر P و Q در روی ox بفاصلهٔ OP = x و OQ = a + x مفروض است



مطلوبست اولاً محاسبهٔ AP = p و AQ = q و خطوط مثلثاتی زاویه PAQ = φ برحسب a و x همچنین تغییرات φ هرگاه x تغییر کند ثانیاً x را بطریقی حساب کنید که محیط مثلث APQ مساوی $a(2 + \sqrt{3})$ باشد و در اینصورت موضع نقاط P و Q را تعیین نمائید

۲۱۴ - تابع $y = \frac{3 - 2x}{2(x-1)^2}$ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آنرا رسم کنید ثانیاً خط بمعادلهٔ $y = m$ منحنی را ممکن است در دو نقطهٔ M و M' قطع کند در اینصورت معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط M و M'



باشد و از روی آن در وجود این نقاط بحث نمائید ثالثاً مطلوبست تعیین رابطهٔ مانند E مستقل از m مابین طولهای این نقاط و از روی آن ثابت کنید که همواره میتوان نقطهٔ مانند H در روی $x'x$ تعیین نمود بطریقی که $\overline{HP} \times \overline{HP'} = C^{te}$ باشد بنا بر آنکه P و P' مقادیر M و M' بر محور $x'x$ باشد رابعاً ثابت کنید که اگر مبدأ مختصات را بطور مناسبی در روی $x'x$ تغییر دهیم رابطه E را میتوان بصورت $\frac{2x'x''}{x'+x''}$ نوشت خامساً از روی مطالب ثالثاً ثابت کنید که جمیع دوایر بقطر PP' دارای یک محور اصلی میباشند و با یکدیگر نقطه مشترکی ندارند سادساً از روی مطالب رابعاً ثابت کنید که P و P' همیشه نسبت بدو نقطه ثابت مزدوج توافقی یکدیگر میباشند و طول این نقاط را تعیین نمائید

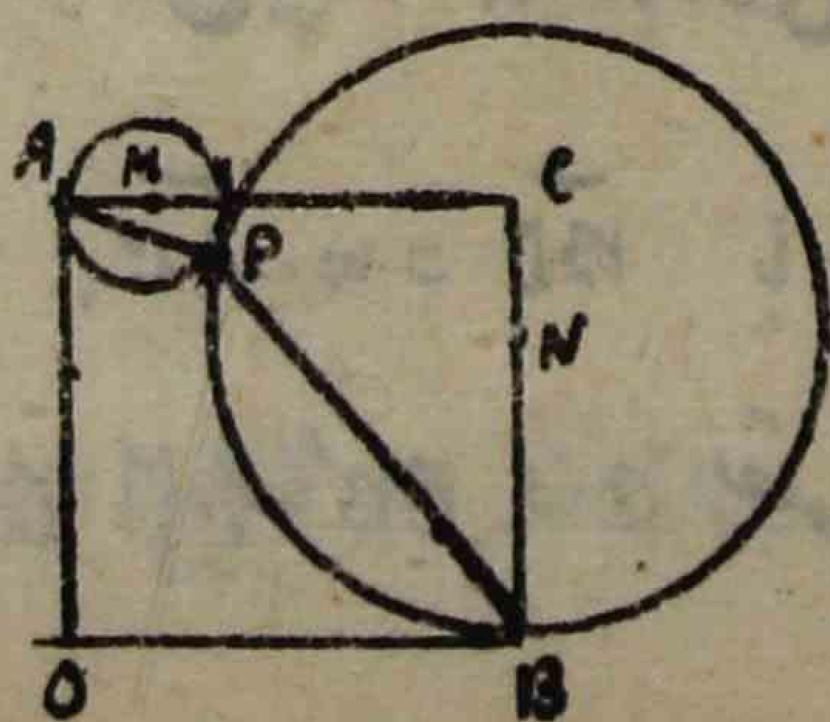
۲۱۵ ــ اولاً مطلوبست تغییرات تابع $Y = \frac{1-x^2}{2}$ و $y = x - x^2$ و ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر x $Y > y$ میباشد مگر بازاء یک مقدار که $Y = y$ خواهد بود و این مقدار x را حساب کنید ثانیاً معلوم کنید که نقطه M بمختصات (a, b) در کدام ناحیه باید واقع باشد برای آنکه $b > \frac{1-a^2}{2}$ باشد ثالثاً هرگاه a و b دو مقدار معلوم باشند تعیین کنید که آیا برای مقدار ثابت m میتوان مقداری تعیین نمود بطریقیکه تابع $-\frac{1+m^2}{2}x^2 + mx$ بازاء $x = a$ مساوی b گردد و تحقیق کنید که باینطریق مقادیر مختلفی برای m بدست میآید یا خیر و در حالتی که دو مقدار یافت شود ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات آن بازاء یکی

از این مقادیر نقطه مشترکی بطول محصور مابین ۰ و a با منحنی L نخواهد بود

۲۱۶- مثلث ABC که در آن زاویه A قائمه و زاویه B و وتر $BC = a$ معلوم است فرض شده هرگاه D قرینه A نسبت بوتر BC و I وسط AC باشد نقطه I را به D وصل میکنیم مطلوبست اولاً محاسبهٔ ID برحسب a و B و همچنین محاسبهٔ tg زوایای ADI و AID برحسب B و محاسبهٔ آنها در حالتی که $B = 60°$ باشد ثانیاً فرض میکنیم BC ثابت و زاویه A قائمه و زاویه B تغییر کند مطلوبست تغییرات طول DI هرگاه $tg B = x$ فرض شود و رسم شکل ABC نظیر ماکزیموم DI

۲۱۷- دو محور قائم ox و oy و خط $\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1$ مفروض است a و b دو طول معلوم $(a > b)$ و φ زاویه حاده میباشد مطلوبست اولاً محاسبهٔ طول $AB = u$ قطعه از این خط محصور مابین دو محور همچنین محاسبهٔ سطح $S =$ مثلث AOB برحسب a و b و φ ثانیاً رسم جدول و منحنی تغییرات u و S هرگاه φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند ثالثاً مطلوبست محاسبهٔ $\sin^2\varphi$ و $\cos^2\varphi$ و $tg^2\varphi$ بفرض آنکه u مساوی مقدار معلوم l باشد

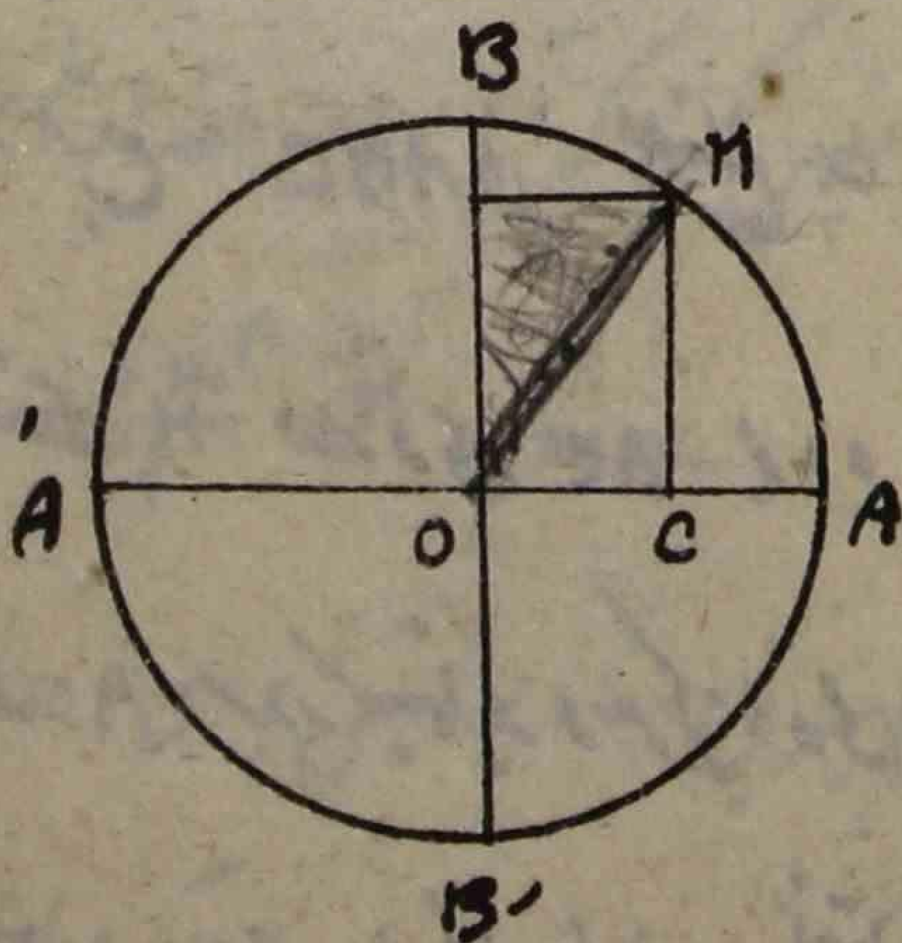
۲۱۸- مربع $OABC$ بضلع a و دو دایرهٔ متغیر مماس خارج مفروض است مرکز اولی نقطه M در روی AC بوده و بر نقطه A مرور مینماید و مرکز دومی نقطه N در روی BC بوده و بر نقطه B



مرور میکند فرض میکنیم $AM = x$ و $BN = y$ باشد مطلوبست اولاً محاسبهٔ y برحسب a و x ثانیاً تغییرات y هرگاه x مابین ۰ و a تغییر کند ثالثاً هرگاه P نقطهٔ تماس در دایره باشد زاویه APB را حساب کنید

۲۱۹- دو محور عمود بر یکدیگر و نقطهٔ M بمختصات $x = a \times \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $y = a \times \frac{2t}{1+t^2}$ که در آن a ثابت و t نمایش پارامتریست مفروض است ثابت کنید که هرگاه t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند نقطه M بفاصلهٔ ثابت a از مرکز O باقیمانده و بنابراین مکان آن دایرهٔ بمرکز O و بشعاع a میباشد ثانیاً فرض میکنیم نقطه B وضعیت M بازاء $t = \infty$ باشد تحقیق کنید که ضریب زاویه خط BM مساوی t میباشد ثالثاً خط $4x + 3y - m = 0$ مفروض است فرض میکنیم نقاط M' و M'' محل تقاطع آن با منحنی باشد مطلوبست تشکیل معادله درجه دومی برحسب t که ریشه‌های آن t' و t'' ضریب زاویه خط BM' و BM'' باشد (بحث برحسب مقادیر m) رابعاً مطلوبست محاسبهٔ $\widehat{M'BM''}$ برحسب m

۲۲۰- در دایرهٔ بشعاع R دو قطر AA' و BB' بر یکدیگر عمود میباشند جهت از A' به A و از B' به B را جهت مثبت اختیار میکنیم



مطلوبست موضع نقطه M در روی دایرهٔ فوق بطریقی که $\overline{BD} = m.\overline{AC}$ باشد بنابرآنکه D تصویر M بر BB' و C تصویر M بر

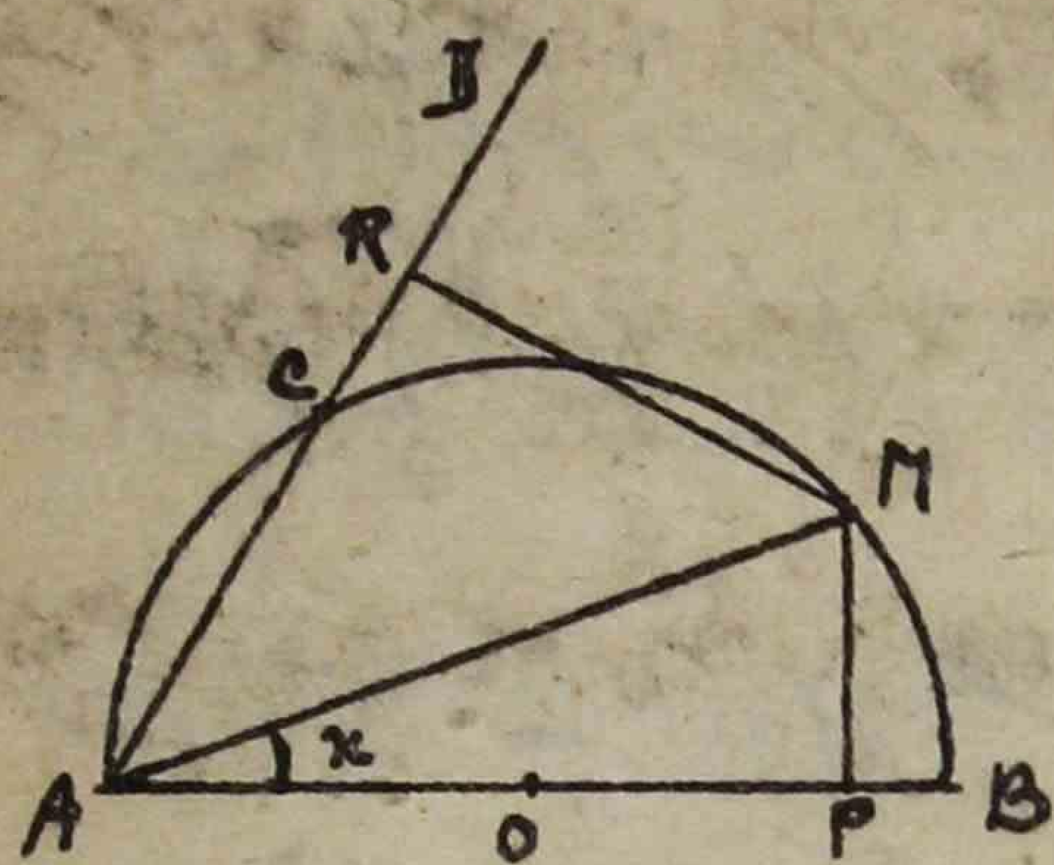
AA' باشد ثانیاً بازاء هر مقدار مثبت m دو نقطه M' و M'' بدست میآید مطلوبست محاسبهٔ وتر $M'M''$ برحسب R و m و همچنین سطح مثلث $M'OM''$ و تعیین مقادیر m بطریقی که این مثلث متساوی الاضلاع باشد ثالثاً ثابت کنید که خط $M'M''$ بازاء جمیع مقادیر m همواره بر نقطه ثابتی مرور مینماید

۲۲۱- سهمی $y^2=2px$ مفروض است اولاً مطلوبست معادلهٔ خط قائم بر منحنی با ضریب زاویه m ثانیاً معلوم کنید از نقطه P واقعه در سطح سهمی فوق چند قائم میتوان بر آن رسم نمود (بحث) باینطریق معلوم میشود برحسب آنکه نقطه P در یکی از دو ناحیهٔ که بواسطهٔ منحنی مانند C که معادله آنرا معلوم نموده و آنرا رسم میکنید باشد مسئله دارای یک یا سه جواب خواهد بود ثالثاً سطح حادث مابین منحنی C و سهمی مفروض را حساب کنید

۲۲۲- بیضی E بمعادلهٔ $\lambda^2(y^2-4)+4x^2=0$ مفروض است اولاً بطریقه تحلیلی ثابت کنید که موازی تمام امتدادهای ممکنه میتوان دو خط بر بیضی مماس نمود ثانیاً ثابت کنید که یکزوج از این مماسها T و T' و نقاط تماس آنها B و B' همواره ثابت مانده و با تغییر λ تغییر نمیکند ثالثاً λ را تعیین کنید بطریقیکه فاصله نقاط تماس مماسهای موازی با خط $y=x$ مساوی $\frac{2}{5}$ باشد و بیضی و مماسها را بازاء این مقدار λ رسم کنید

۲۲۳- نیمدایره بقطر $AB=2R$ مفروض است از نقطه A قاطع AM را چنان





رسم میکنیم که با قطر AB زاویه 60° تشکیل دهد

حال چون نقطه مانند M در روی قوس

BC اختیار نموده و فرض میکنیم

$\widehat{MAB}=x$ باشد چون از نقطه M عمود MP را بر AB و MR را بر AD اخراج کنیم مطلوبست اولاً محاسبهٔ $y=MP+MR$ برحسب R و x و رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x تغییر کند ثانیاً محاسبهٔ سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$ و محور $y'y$ و ارده بطول $\frac{\pi}{3}$ ثالثاً x را حساب کنید بطریقیکه $MP+MR=m$ باشد (بحث) رابعاً بحث اخیر را با منحنی تغییرات y تطبیق نمائید.

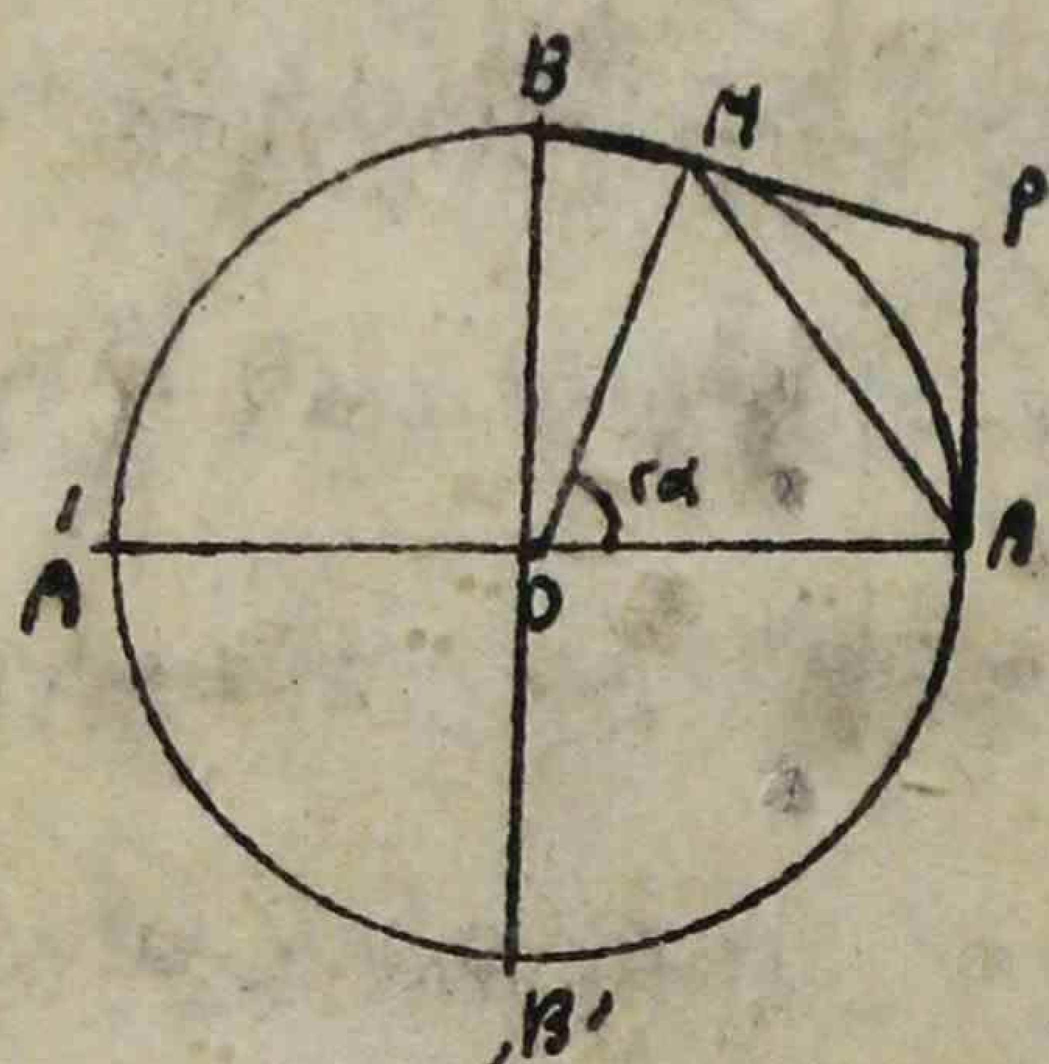
۲۲۴- معادله درجهٔ دوم

$$x^2-2ux+2u^2-uR^2=0$$

که در آن u پارامتر و R مقدار معلومی است مفروض است اولاً مطلوبست تغییرات x' و x'' ریشه های معادلهٔ فوق هرگاه u در حدود ممکنه تغییر کند و رسم منحنی نمایش این تغییرات هرگاه مقادیر u در روی محور طولها و مقادیر نظیر ریشه ها در روی محور عرضها نقل شود و از روی منحنی فوق در وجود و علامت ریشه های معادلهٔ مفروض برحسب مقادیر u بحث کنید ثانیاً در روی محور $y'y$ نقطه B را بعرض R و در روی محور $x'x$ نقاط A' و A'' را بطول x' و x'' ریشه های معادلهٔ فوق فرض کرده برسه نقطه A' و A'' و B دایره میگذرانیم و فرض میکنیم این دایره محور $y'y$ را در نقطه دیگر B'

قطع کند مطلوبست محاسبهٔ z عرض نقطهٔ B ثالثاً مختصات نقطهٔ D مرکز این دایره را حساب نموده مکان آنرا رسم نمائید رابعاً با مفروضات فوق تغییرات شعاع این دایره را معلوم کنید خامساً مطلوبست وضعیت نقطهٔ D در روی مکان فوق هرگاه دایره بر محور $y'y$ یا محور $x'x$ مماس بوده و یا بر نقطهٔ O مرور نماید

۲۲۵- دایرهٔ بشعاع R و دو قطر AA' عمود بر یکدیگر مفروض است از نقطهٔ غیر مشخص M خط MP را بر دایره مماس میکنیم تا مماس در نقطهٔ A را در نقطهٔ P قطع کند مطلوبست اولاً محاسبهٔ s سطح مثلث BOM و اضلاع و S سطح مثلث APM برحسب R و α ثانیاً هرگاه فرض کنیم $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ باشد تحقیق کنید که $\frac{S}{2s} = \frac{x^3}{1-x^2}$ میباشد ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ را هرگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم کنید رابعاً تحقیق کنید که هرگاه r شعاع دایرهٔ محاطیهٔ مثلث APM باشد رابطهٔ ذیل برقرار است



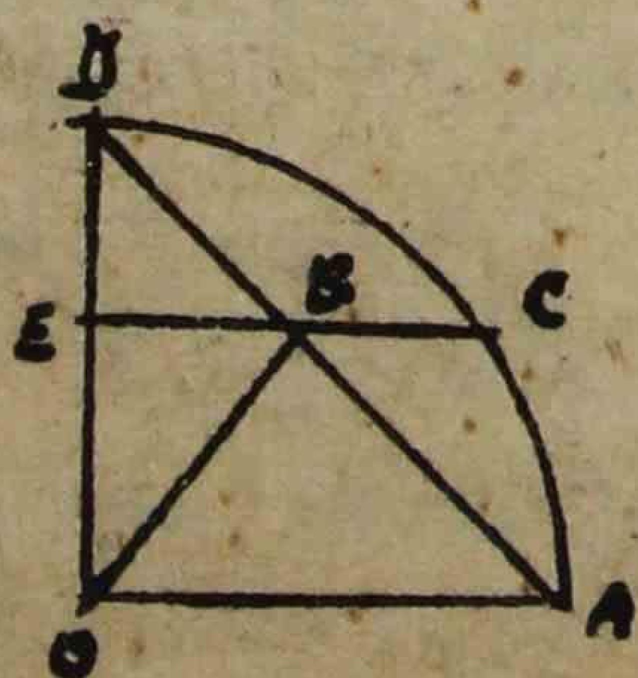
$$r = R(1 - \cos\alpha)$$

۲۲۶- معادلهٔ درجهٔ دوم $2x \sin^2 z - (x^2+3) \sin z + 2x = 0$ مفروض است اولاً حدود مقادیر x را تعیین کنید که بازاء آنها $\sin z$ دارای مقدار حقیقی باشد همچنین مطلوبست بحث در علامت ریشه‌ها ثانیاً هرگاه y کثیر الجمله برحسب



x باشد که مبین معادله فوق را تشکیل میدهد مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x جمیع مقادیر ممکنه را دارا شود ثالثاً سطح حادث مابین منحنی فوق و محور x ها و محور y ها وارد نه بطول $x=1$ راحساب کنید

۲۲۷- تابع $y=\frac{3}{4}a(1-x^2)$ که در آن a نمایش پارامتریست مفروض است اولاً ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر a منحنی نمایش تغییرات این تابع از دو نقطه ثابت میگذرد که مختصات آنرا تعیین مینمائید ثانیاً ثابت کنید که همواره میتوان دو مقدار مانند a' و a'' برای a چنان تعیین نمود که دو منحنی نمایش تغییرات تابع نظیر این دو مقدار یکدیگر را بزاویه قائمه قطع نمایند ثالثاً مطلوبست دو مقدار برای a بطوریکه دو منحنی y نظیر این دو مقدار یکدیگر را بزاویهٔ قائمه تلاقی نموده و مقدار جبری مساحت سطح محصور مابین دو منحنی مساوی $\frac{5}{9}$ - گردد رابعاً منحنی c نمایش تغییرات تابع مفروض محور $y'y$ را در نقطه A قطع مینماید فرض میکنیم a بطریقی تغییر کند که معادلهٔ حرکت A در روی محور $y'y$ برحسب زمان $y=\frac{3}{4}\times\frac{(t+1)^2}{t^2+1}$ باشد در اینصورت مطلوبست تغییرات سطح مابین منحنی c و محور $x'x$ برحسب زمان



۲۲۸- ربع دایرهٔ بشعاع R مفروض است از نقطه E بفاصلهٔ $OE=x$ خط EC راموازی OA رسم میکنیم تا وتر AD را در نقطه B قطع کند مطلوبست اولاً محاسبهٔ سطح دو ذنقه

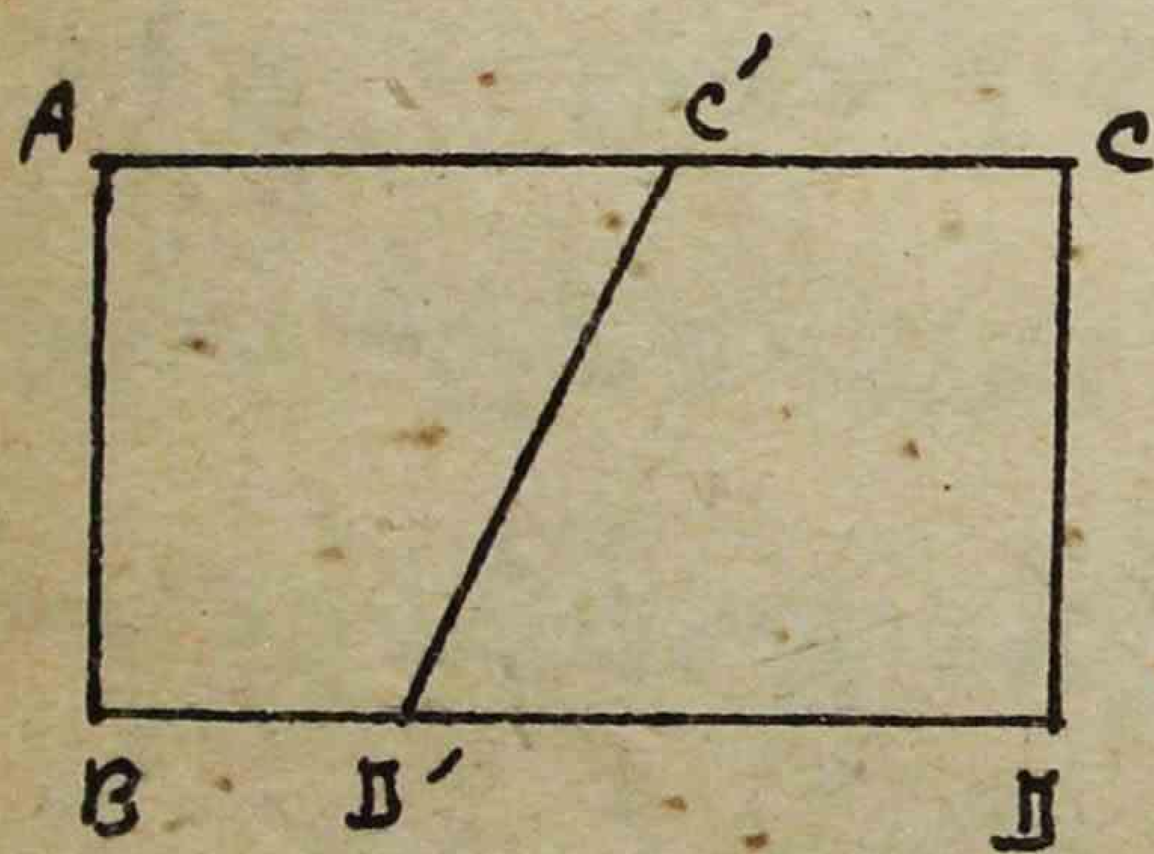
OACB برحسب R و x ورسم جدول ومنحنی تغییرات آن هرگاه x تغییر کند ثانیاً بدون استعانت جدول زوایا واضلاع ذوزنقه را درحالتیکه ذوزنقه قابل محاط شدن در دایره باشد حساب کنید وتحقیق کنید که دراین حالت قاعده‌ٔ BC ماگزیموم خودرادارا خواهد بود

۲۲۹- دوخط $x'ox$ و $y'oy$ ونقطه ثابت A درروی منصف الزاویه xoy مفروض است فرض میکنیم $xoy = 2\alpha$ و $OA = a$ باشد ازنقطه A قاطع متغیری رسم میکنیم وفرض میکنیم که $x'x$ رادرنقطه P و $y'y$ رادرنقطه Q قطع کند هرگاه $OP = x$ و $OQ = y$ باشد اولاً ثابت کنید که $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ مقداریست ثابت ثانیاً مطلوبست محاسبه‌ٔ x و y بطریقی که سطح مثلث OPQ مساوی مقدار معلوم k^2 باشد ثالثاً دایره‌ٔ C مار برنقاط O و P و Q خط OA رادرنقطه دیگر M قطع میکند ثابت کنید که نسبت سطح دایره‌ٔ C بسطح مثلث MPQ بستگی بقاطع فوق ندارد ومقدار آنرا حساب کنید رابعاً تحقیق کنید که خطوط MP و MQ هرگاه قاطع تغییر کند بردو Coniques بکانون A مماس خواهند بود

۲۳۰- مطلوبست اولاً رسم جدول ومنحنی تغییرات تابع $y = (x^2 - 2x + 1)^2$ ثانیاً خط $y = 1$ منحنی رادرچهارنقطه قطع مینماید که دوبدو قوسی ازمنحنی رامحدود مینمایند مطلوبست محاسبه‌ٔ سطح سه قطعه مابین این قوسها ووترهای حاصله ثالثاً معادله $m = (x^2 + \lambda x + 1)^2$ که درآن λ و m مقادیرمعلوم و $m > 0$ میباشد مفروض است مقادیر λ و m را

بطریقی انتخاب کنید که معادله دارای چهار جواب باشد همچنین رابطهٔ مابین p و m تعیین نمائید بطریقی که چهار جواب جمل متوالیه یک تصاعد عددی باشند رابعاً تحقیق کنید که با وجود شرط فوق میتوان فرض نمود $p = \frac{4}{9m^2}$ حال مطلوبست محاسبهٔ ریشه‌های معادله برحسب m و بالاخره هرگاه فرض کنیم که $n = \sqrt{5}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ باشد ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه چهار ریشه منطق باشند آنست که n منطق باشد

۲۳۱ — مربع مستطیل $ABDC$ که اضلاع آن a و $2a$ میباشد مفروض است مطلوبست اولاً وضعیت خطی مانند $C'D'$ متکی بر AC و BD بطریقی که طول آن $2a$ باشد ثانیاً تحقیق شرط آنکه نقطهٔ C' مابین A و C و D' مابین B و D باشد ثالثاً مطلوبست وضعیت $C'D'$ بطریقی که سطح



ذوزنقهٔ $ABD'C'$ مساوی k^2 باشد رابعاً هرگاه l معلوم باشد مطلوبست حدود k و بالعکس هرگاه k معلوم باشد مطلوبست حدود l خامساً هرگاه ذوزنقهٔ $ABD'C'$ را در حول AB دوران دهیم حجم حادث را حساب کنید سادساً l را بطریقی حساب کنید که حجم فوق مساوی $\frac{2}{3}\pi a^3$ باشد (l و k و a معلوم فرض شده است)

۲۳۲ — تابع $y = \frac{x^2-4x+a}{a(x+1)}$ مفروض است a را تعیین کنید برای آنکه اولاً منحنی تغییرات تابع بیک خط مستقیم تبدیل شود ثانیاً منحنی y با خط $y=-2x-8$